

Българска академия на науките  
Институт по математика и информатика

Виктория Колева Рашкова

**Изследване на динамичното поведение на Клетъчно  
Невронни Модели с приложения в разпознаване и  
обработка на образи**

**Автореферат**

на дисертация за получаване на образователна и  
научна степен “доктор”

Научна специалност 01.01.13

“Математическо моделиране и приложения на математиката”

Научен ръководител: проф. дмн А. Славова

София, 2012

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на научен семинар на секция “Диференциални уравнения и математическа физика” при Института по математика и информатика на БАН, състоял се на 11.06.2012 г.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на Института по математика и информатика на БАН.

Автор: Виктория Колева Рашкова

Заглавие: Изследване на динамичното поведение на Клетъчно Невронни  
Модели с приложения в разпознаване и обработка на образи

Научен ръководител: проф. дмн А. Славова

# Обща характеристика на дисертацията

## 1. Актуалност и мотивировка на темата

В настоящия дисертационен труд се изследва динамичното поведение на клетъчно невронни мрежи с приложения в разпознаването и обработката на образи.

КНМ са нов клас невронни мрежи, въведени за пръв път от Leon Chua и Lin Yang през 1988 г. Те използват решетка от нелинейни динамични вериги, които са свързани по между си, в резултат на което се предава голямо количество информация в реално време. Едно от най-важните свойства на КНМ е, че отделните клетки се разглеждат като нелинейни динамични системи, докато връзките между тях са линейни. КНМ ни позволява да изучим локалната динамика на отделна клетка и въз основа на нейното поведение да направим извод за поведението на цялата мрежа. Това е възможно благодарение на свойството на КНМ за най-близко съседно взаимодействие. КНМ имат много обещаващи приложения в разпознаването и обработката на образи. За тези приложения КНМ действат като двумерен филтър. За разлика от стандартните двумерни филтри КНМ използва паралелна обработка на входния образ и изходния образ се получава в реално време. Това забележително свойство позволява големи образи да се обработват в реално време. Приложенията на КНМ обхващат широки области, като биологични системи, физически системи, моделиране на нелинейни явления, генериране на нелинейна и хаотична динамика, асоциативна памет, неврофизиология, роботика и др. [3, 4, 5, 6, 7].

Частните диференциални уравнения (ЧДУ), обработката и разпознаването на образи, задачи дефинирани във времето и пространството, се характеризират с факта, че информацията необходима за решаването на тези системи в бъдещето или равновесното състояние в дадена точка се съдържа в околност на същата точка. За тази цел прилагаме КНМ на реакция-дифузия, които правят паралелни изчисления в пространството и са най-доброто решение за локални и дифузионни задачи. КНМ на реакция-дифузия представляват нов подход в обработката на образи чрез нелинейни ЧДУ. Задачите и методите за тяхното решаване в дисертацията са нов подход при обработка и разпознаване на образи. Това е много актуална задача и все още методите за нейното решаване са в процес на изучаване. В настоящия дисертационен труд се разглеждат модели на конвекция-дифузия за изчистването на образи.

## 2. Цел, предмет, задачи и структура на дисертацията

Цел на дисертацията е построяване на модели КНМ за разпознаване и обработка на образи и изследване на тяхното динамично поведение. Основен метод, който се прилага в изследванията е метода на хармоничния баланс (МХБ). Методът на хармоничния баланс е много ефикасен и гъвкав метод за предсказване на динамиката на равновесното състояние на мрежата. В дисертацията се използват трансформации на Fourier, чрез които мрежата се преобразува в система на Lur'e. В настоящата дисертация е използван метод на описващата функция, който е разновидност на МХБ. Той се използва за изследване на трептенията в нелинейни системи с обратна връзка. Основното предимство на този метод е във възможността да се предсказват гранични цикли в нелинейни системи.

Предмет на изследване в дисертацията са уравнения на реакция-дифузия, имащи приложения в разпознаване и обработка на образи. Разглеждат се нелинейни частни диференциални уравнения (ЧДУ) като основен модел, който се прилага в предварителната обработка на изображения. Те се класифицират в три основни категории: линейни изотропни филтри; нелинейни изотропни филтри; нелинейни анизотропни филтри. Изучават се КНМ модели на нелинейни изотропни и/или анизотропни ЧДУ чрез полиномни апроксимации на дифузната функция. Сравнява се динамичният характер на дискретна полиномна КНМ с непрекъснат модел на ЧДУ.

В дисертацията е разработен алгоритъм за изследване на явлението “ръб на хаоса”. Това ново явление е резултат от локалната активност на клетките на хаотична КНМ. Чрез разработения алгоритъм се определя областта на клетъчните параметри, в която е възможно да се прояви по-сложно, хаотично динамично поведение на КНМ.

- Описана е архитектурата на КНМ, както и основните уравнения, описващи линейни КНМ. Представени са основните теореми и резултати от анализа на устойчивостта на линейни КНМ в глава 1. Направени са компютърни симулации на два примера илюстриращи теоретичните резултати.
- Подробно са представени метода на хармоничния баланс и метода на описващата функция (глава 2), които са използвани в дисертационния труд за изследване динамиката на КНМ на реакция-дифузия. Разработен е алгоритъм за прилагане на МХБ при изследване на динамиката на КНМ. Представени са и трансформации на Fourier, чрез които се прилага разработения алгоритъм.

- Изследва се динамиката и устойчивостта на КНМ на реакция-дифузия. Генерирана е КНМ с две клетки. Представени са 3 клетъчно-свързващи теста, както и тяхното доказателство. В глава 3 е направен анализ за наличие на хаос в КНМ модели на реакция-дифузия . Въведена е полиномна КНМ, в която тегловите функции са от полиномиален вид. Разработен е конструктивен алгоритъм за определяне на областта наречена “ръб на хаоса”.
- Изучени са различни решения на КНМ от тип „бягаща вълна” в глава 4. Доказани са резултати за структурата на решенията от типа „бягаща вълна” за дискретни в пространството системи като КНМ. Направена е и класификация на този вид решения за общо статично уравнение на КНМ. За уравнението на Newell Whitehaed е построен КНМ модел и е изследвана структурата на решенията от тип бягаща вълна.
- Въведени са и са изучени модели за формирането на шаблони с приложение в обработката на образи. В глава 5 са разгледани първо единични уравнения с гранични условия на Neumann и с гранични условия на Dirichle. След това се разглеждат системи в сянка и  $2 \times 2$  дифузионни системи, за които отново се изучава устойчивостта на равновесното състояние.
- Въвежда се и се изучава нов модел на конвекция-дифузия, който има приложение в разпознаването на образи в глава 6. Един основен вид ЧДУ използвани в обработката на образи е модела на Perona- Malik. За него е построена полиномиална КНМ и са сравнени получените резултати за моделите на Perona- Malik и полиномния КНМ модел. Построени са полиномиални КНМ и е изследвана динамиката им с помощта на метода на хармоничния баланс. Възможните приложения на получените резултати са за решаване на задачи за обработка на изображения, като: разпознаване на почерк; идентифициране на лица; интерпретация на картини и сцени; компресия на данни за образи.

Структурата на дисертацията се състои от уводна част, 6 глави, заключителна част, списък на цитираните литературни източници и списък на публикациите на автора. Текстът е в обем от 146 страници, в това число 37 фигури и 1 таблица. Списъкът на литературата обхваща 138 заглавия. Номерата на уравненията, таблиците и фигурите в автореферата съвпадат с тези от дисертацията.

### **3. Полезност и приложимост на получените резултати в дисертацията**

Възможните приложения на получените резултати са за изследване на прилагането на КНМ при формиране на подходящи шаблони в кодирането на образи. КНМ на реакция-дифузия разгледани в дисертацията могат да се използват за създаване на подходяща кодова книга. За оптималното възстановяване на даден образ от тази книга се прилагат различни методи, но към настоящия момент те не са достатъчно ефективни. Прилагането на  $2 \times 2$  дифузионни системи може да подобри качеството на декодирания образ. Друго възможно приложение на получените резултати е за изследване на механичното поведение на пиезоелектрични материали (РЕМ) и магнето електроеластични материали (МЕЕМ) с пукнатини; формулиране, решаване и изследване на задачата описваща модели на реакция-дифузия с КНМ и приложението им за решаване на обратни задачи за идентификация на пукнатини.

### **4. Аprobация на дисертацията**

Основните резултати са публикувани в International Journal of Neural Networks and Applications; Mathematica Balkanica; Comptes Rendus De L'Academie Bulgare Des Sciences; Proceedings of European Conference of Circuits, Theory and Design - Sweden 2011, Proceedings MADEA, Proceedings BGSIAM 2007,2008,2009,2010,2011.

Част от резултатите са получени в изпълнение на договор ДИД 02/ 15, финансиран от Националния Фонд Научни Изследвания на тема „Комбиниран подход с метод на гранични интегрални уравнения и клетъчно невронни мрежи за анализ на пиезоелектрични материали с пукнатини”.

Числените резултати са получени с програма MatLab 7 , CNN Tools, MATCNN.

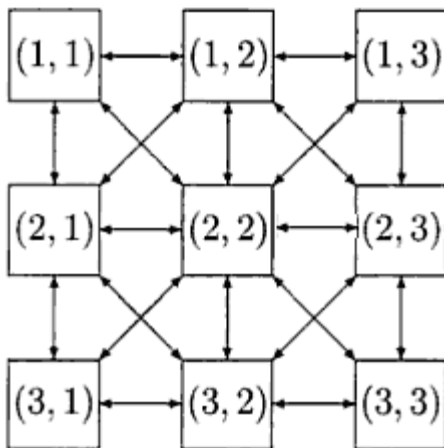
Получените в дисертацията резултати са докладвани на BGSIAM'07, BGSIAM'08, BGSIAM'09, BGSIAM'10, BGSIAM'11, Conference “Mathematics in Industry”, Sofia 2010, Conference MADEA, Sunny beach, 2010. Също така резултатите са докладвани на семинара по диференциални уравнения и приложения в ИМИ, БАН през 2008 г. и на отчетните сесии на Секция Математическа физика на ИМИ, БАН през 2010, 2011 г.

# Съдържание на дисертацията

## ГЛАВА 1. КЛЕТЪЧНО НЕВРОННИ МОДЕЛИ (КНМ) НА РЕАКЦИЯ-ДИФУЗИЯ

### 1.1 АРХИТЕКТУРА НА КНМ

Линейната КНМ е аналогов динамичен процесор, състоящ се от клетки, които съдържат линейни капацитети, линейни резистори, линейни и нелинейни източници. Основните единици на КНМ са клетките  $C(i, j)$ , а връзките между тях показват взаимодействието между всяка клетка и нейните съседни клетки. Основното свойство е, че динамиката на отделна клетка е нелинейна, но връзката между тях е линейна. С други думи, КНМ може да се разглежда като нелинейна решетка с линейна пространствена структура. Нека разгледаме двумерна решетка с  $3 \times 3$  система на съседно взаимодействие, която е показана на Фиг.1.1.



Фиг.1.1. Двумерна КНМ с  $3 \times 3$  система на съседно взаимодействие

Коефициентите, дефиниращи връзките между клетките -  $A(i, j; k, l)$  и  $B(i, j; k, l)$  се наричат съответно, **темплет за обратна връзка** и **контролен темплет**. Тези темплети могат да се запишат в компактна форма като таблици или матрици. Мрежата може да има различна архитектура: правоъгълна, шестоъгълна, сферична и др. Дадена  $M \times M$  КНМ притежава следните 4 спецификации: клетъчна динамика; синаптичен закон, който определя пространственото взаимодействие между съседните клетки; начални и гранични условия.

### 1.1.1. ОСНОВНИ УРАВНЕНИЯ, ОПИСВАЩИ ЛИНЕЙНИ КНМ

#### 1.1.1.1. СТАТИЧНО УРАВНЕНИЕ:

За простота разглеждаме КНМ, в която клетките са разположени на 2-мерна решетка. Тогава динамиката на КНМ най-общо се описва със следната система уравнения [11, 13, 15, 33]:

$$\dot{x}_{ij}(t) = -x_{ij}(t) + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \tilde{A}_{ij,kl}(y_{kl}(t), u_{ij}(t)) + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \tilde{B}_{ij,kl}(u_{kl}, u_{ij}) + I_{ij} \quad (1.1)$$

$$y_{ij}(t) = f(x_{ij}) = \frac{1}{2}(|x_{ij}+1| - |x_{ij}-1|) \quad (1.2)$$

$1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq M$

където  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $u_{ij}$  са статичната, изходната и входната променливи на отделната клетка  $C(i, j)$  в КНМ;  $C(i, j)$  се отнася за отделна точка от решетката на двумерната КНМ, асоциирана с клетка,  $C(i, j) \in N_r(i, j)$  е съседна клетка в околност с радиус  $r$  на клетка  $C(i, j)$ ,  $I_{ij}$  е независим токов източник.  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  са нелинейни темплети, които описват връзките между всяка клетка и всички нейни съседни клетки в зависимост от техните входни, статични и изходни променливи.

В линейният случай вместо  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  имаме следните темплети:

$$\sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} A_{ij,kl} y_{kl}(t) + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} B_{ij,kl} u_{kl} \quad (1.3)$$

Когато темплетите са пространствено независими, всяка клетка се описва чрез две реални матрици  $A$  и  $B$ .

$$A = \begin{pmatrix} A(i, j; i-1, j-1) & A(i, j; i-1, j) & A(i, j; i-1, j+1) \\ A(i, j; i, j-1) & A(i, j; i, j) & A(i, j; i, j+1) \\ A(i, j; i+1, j-1) & A(i, j; i+1, j) & A(i, j; i+1, j+1) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B(i, j; i-1, j-1) & B(i, j; i-1, j) & B(i, j; i-1, j+1) \\ B(i, j; i, j-1) & B(i, j; i, j) & B(i, j; i, j+1) \\ B(i, j; i+1, j-1) & B(i, j; i+1, j) & B(i, j; i+1, j+1) \end{pmatrix}$$

Тази форма ни позволява да запишем статичното уравнение в компактен вид чрез двумерния конволюционен оператор:



$$\dot{x}_{ij}(t) = -x_{ij}(t) + A * y_{ij}(t) + B * u_{ij} + I_{ij} \quad (1.5)$$

Симетрията на темплата за обратна връзка  $A$  е необходима за доказване на пълна устойчивост на КНМ и затова въвеждаме следната дефиниция:

**Определение 1.4.: (Симетрично свойство)-** Темплетът  $A$  е симетричен, ако:

$$A_{ij,kl} = A_{kl,ij}, \quad 1 \leq i, k \leq M, \quad 1 \leq j, l \leq M \quad (1.6)$$

За КНМ са характерни следните три вида гранични условия:

1) Фиксирано гранично условие на Dirichle:

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv v_0 = E_1 \\ x_{M+1} &\equiv v_{M+1} = E_2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

2) Гранични условия на Neumann:

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv v_0 = v_1 \\ x_{M+1} &\equiv v_{M+1} = v_M \end{aligned} \quad (1.10)$$

3) Периодични гранични условия:

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv v_0 = v_M \\ x_{M+1} &\equiv v_{M+1} = v_1 \end{aligned} \quad (1.11)$$

### 1.1.2. ТЕОРЕМИ И РЕЗУЛТАТИ ЗА УСТОЙЧИВОСТ НА ЛИНЕЙНИ КНМ

Едно от най-важните приложения на КНМ е в разпознаването и обработката на образи. В едномерният случай има две състояния на информационна обработка в мрежата: глобално разпространение и локална дифузия, което означава, че две отделни клетки, намиращи се на определена дистанция или си взаимодействат или не. Основната функция на КНМ при обработката на образи е да проектира или трансформира входен образ в съответен изходен. Това означава, че КНМ трябва винаги да клони към константно равновесно състояние. Един от основните методи в теорията на устойчивостта на динамичните вериги, чрез който се гарантира устойчивостта на КНМ е метода на Lyapunov.

За изследването на устойчивостта на КНМ, мрежата се разглежда като пространствен цифров филтър, а пространствените параметри в темплетите се представят като коефициенти на филтъра, като той има безкраен импулсен

отговор. Основните работи в областта на КНМ [11, 13, 14, 15, 16, 33] са насочени към намиране на условия, осигуряващи всяка траектория на мрежата да клони към равновесна точка в зависимост от началните условия.

При нашия анализ приемаме, че външните входове са постоянни величини, входните данни са свързани с началните условия, а изходните приемат своите равновесни състояния в равновесните точки, които зависят от началните условия. Такива КНМ имат приложения в много задачи за разпознаване и обработка на образи. Дефинираме функция на Луарипов за линейни КНМ:

**Определение 1.5.:** Скаларната функция на Луарипов за линейни КНМ се дефинира по следния начин:

$$E(t) = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \sum_{kl} A_{ij,kl} y_{ij}(t) y_{kl}(t) + \frac{1}{2} \sum_{ij} y_{ij}^2(t) - \sum_{ij} \sum_{kl} B_{ij,kl} y_{ij}(t) u_{kl} - \sum_{ij} I_{ij} y_{ij}(t) \quad (1.17)$$

**Забележка 1.2.:** Функцията на Луарипов, дефинирана по-горе, може да се интерпретира като „обща енергия“ на КНМ.  $E(t)$  винаги клони към локален минимум, където КНМ произвежда искания изход. Въпреки, че  $E(t)$  е само функция на входа  $u_{ij}$  и на изхода  $y_{ij}$  и не дава пълна информация за променливата на състоянието  $x_{ij}$ , от свойствата на  $E(t)$  може да се извлекат свойствата на равновесното състояние на КНМ.

В дисертационния труд е доказано, че  $E(t)$  е не само ограничена, но и монотонно намаляваща функция на времето  $t$  (Теорема 1.1 и 1.2) за частично линейна сигмоидна изходна функция. Следователно  $E(t)$  клони към някаква граница и нейната производна клони към 0. По-важно за приложенията на КНМ е следното:

**Следствие 1.1.:** След като затихването на КНМ стане нула, винаги се получава константен изход на мрежата. С други думи имаме:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{ij}(t) = \text{const}, \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq M \quad (1.31)$$

Такъв вид устойчивост се нарича **пълна устойчивост** в смисъл, че всяка траектория клони към равновесна точка.

### 1.1.3. ПРИМЕРИ ЗА ЛИНЕЙНИ КНМ

В този параграф разглеждаме два примера за линейни КНМ. Те ни илюстрират по-добре как работят линейните КНМ описани в предходните параграфи.

1. Като първи пример разглеждаме линейна КНМ с размер 4 x 4. Параметрите на веригата на отделна клетка  $C(i, j)$  ги избираме по следния начин: за всяка клетка  $C(k, l) \in N_r(i, j)$  с радиус  $r=1$  т.е. за всяка 3 x 3 система на съседно взаимодействие, задаваме динамичната система описваща КНМ така:

$$\frac{dx_{ij}(t)}{dt} = 10^6 \left[ -x_{ij}(t) + 2y_{ij}(t) + y_{ij-1}(t) + y_{i-1j}(t) + y_{i+1j}(t) + y_{ij+1}(t) \right] \quad (1.36)$$

$$y_{ij}(t) = 0.5(|x_{ij}(t) + 1| - |x_{ij}(t) - 1|) \quad (1.37)$$

$$1 \leq i \leq 4, \quad 1 \leq j \leq 4$$

Извършена е компютърна симулация на по-горе описаната КНМ при следните начални условия:

-0.8	1.0	-1.0	-0.6
1.0	1.0	1.0	-1.0
-1.0	0.9	-1.0	-0.8
-0.9	-1.0	-0.7	-0.8

Статичните променливи на мрежата  $x$ , след време  $t = 5\mu s$  са дадени в таблицата по-долу:

3.95	2.98	-2.97	-3.98
2.98	2.02	-3.94	-4.96
-2.98	-3.94	-5.94	-4.97
-3.98	-4.96	-4.97	-3.98

Съответните изходи  $y$ , при  $t = 5\mu s$  са:

1.0	1.0	-1.0	-1.0
1.0	1.0	-1.0	-1.0
-1.0	-1.0	-1.0	-1.0
-1.0	-1.0	-1.0	-1.0

Наблюдава се наличието на двоичен изход 1 или -1.

В нашия пример устойчивите клетъчни равновесни състояния на вътрешните клетки на мрежата  $C(i, j)$  са решенията на  $x_{ij}$  на клетъчните уравнения, получени чрез смяна на всички кондензатори с отворени вериги, или с други думи получаваме:

$$x_{ij} = 2y_{ij} + y_{i-1j} + y_{i+1j} + y_{ij-1} + y_{ij+1} \quad (1.38)$$

при следните условия:

$$|x_{kl}| \geq 1, \quad 1 \leq k, \quad l \leq 4 \quad (1.39)$$

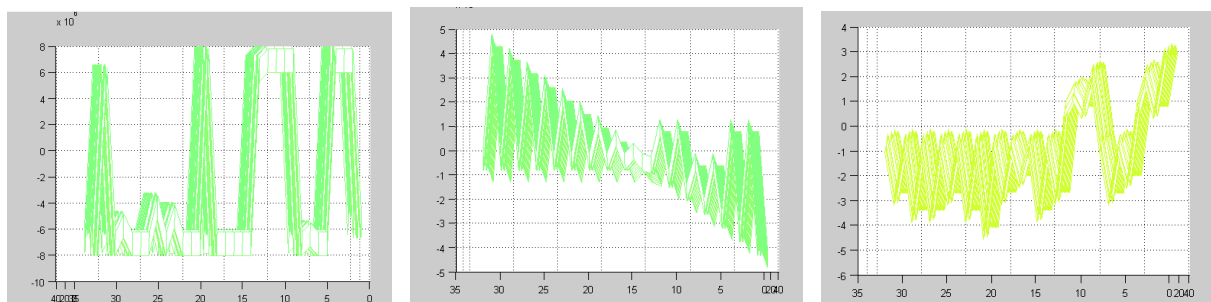
$$|y_{kl}| = 1, \quad 1 \leq k, \quad l \leq 4 \quad (1.40)$$

Като заместим условието (1.40) в уравнение (1.38) и използвайки функцията  $\text{sgn}(\cdot)$  получаваме:

$$x_{ij} = 2\text{sgn}(y_{ij}) + \text{sgn}(y_{i-1j}) + \text{sgn}(y_{i+1j}) + \text{sgn}(y_{ij-1}) + \text{sgn}(y_{ij+1}) \quad (1.41)$$

По-нататък, тъй като  $\text{sgn}(y_{ij}) = \text{sgn}(x_{ij})$  от (1.41) следва, че

$$x_{ij} - 2\text{sgn}(x_{ij}) = \text{sgn}(y_{i-1j}) + \text{sgn}(y_{i+1j}) + \text{sgn}(y_{ij-1}) + \text{sgn}(y_{ij+1}) \quad (1.42)$$



Фиг. 1.4. Компютърна симулация за пример (1.38).

От по-горния анализ следва, че всяка вътрешна клетка от веригата на разглежданата КНМ, може да има само 6 устойчиви клетъчни равновесни състояния -6, -4, -2, 2, 4 и 6. Устойчивото равновесно състояние на всяка клетка изцяло зависи от нейното начално състояние, а също така и от началните състояния на нейните съседни клетки. В [15, 16] е получено, че даже и когато всички равновесни състояния на клетката започват от една и съща начална точка, то те достигат различни точки по различни траектории.

Наблюдава се, че даже и когато тези начални условия са много различни, то съответните крайни състояния след време  $t = 5\mu s$  са практически идентични. От всички по-горни наблюдения, правим заключението, че КНМ винаги се установява в една от своите устойчиви системни равновесни точки след като затихването във веригата стане нула.

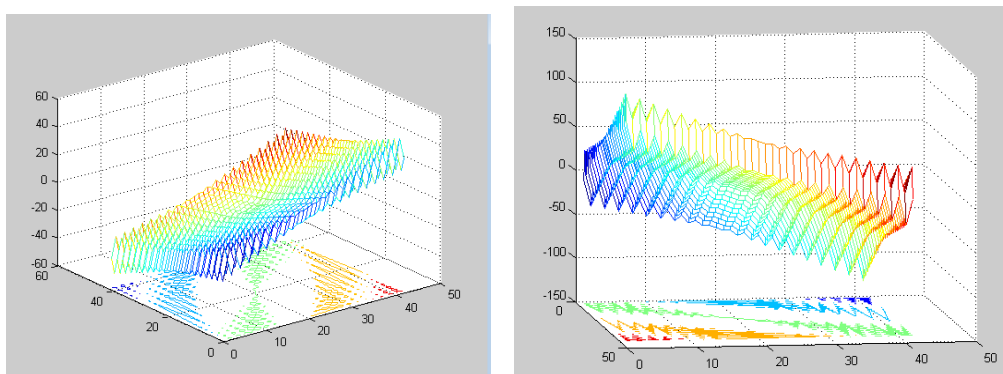
2. Като втори пример разглеждаме двуклетъчна линейна КНМ с хистерезис:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + ah(x_1) - bh(x_2) + cu \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + bh(x_1) + ah(x_2) + cu \end{aligned} \quad (1.43)$$

където  $a > 1$  и  $b > 0$  и  $u$  е константен вход,  $|u| \leq 1$ ,  $c > 0$ .

Нека разгледаме хистерезисния регион, т.е.  $|x| \leq 1$ . Тъй като задачата е да се намерят периодичните решения на (1.43), ние ги търсим под формата на тригонометрични редове на Fourier. Това ни позволява да направим числено построение на периодичните решения.

Този алгоритъм е много полезен, защото при изчисленията получаваме такива операции като умножение, степенуване и събиране на полиноми на Fourier, за които лесно може да се разработи софтуер. Важното е итерационните процеси да бъдат сходящи, защото само в този случай може да се постигне голяма степен на точност при построяване на решенията.



Фиг. 1.5. Компютърна симулация за пример (1.43).

Ако положим  $a - 1 = \varepsilon \in (-\delta, \delta)$ ,  $\delta > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c = 0$  в системата (1.43), получаваме:

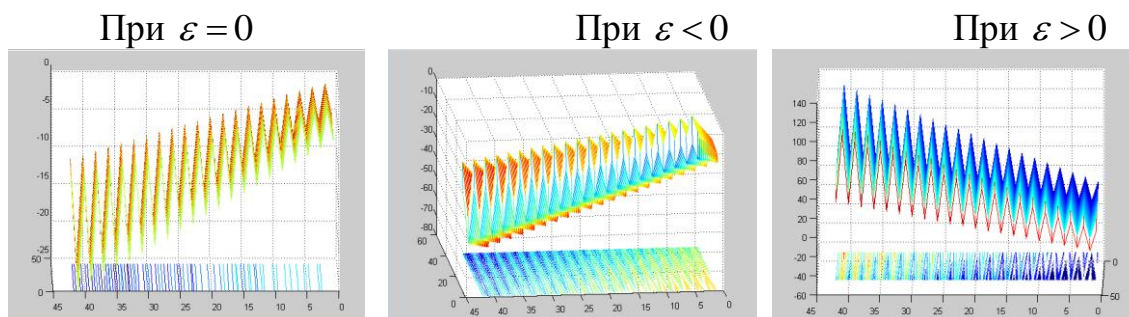
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + (1 + \varepsilon)h(x_1) - bh(x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + bh(x_1) + (1 + \varepsilon)h(x_2)\end{aligned}\tag{1.45}$$

**Теорема 1.5.:** За системата дефинирана с (1.45),

1).  $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0$  е бифуркационна точка за системата. Това е локална бифуркация само за системното равновесие;

2). За  $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  нулата е устойчив фокус;

3). За  $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_2)$ ,  $\varepsilon_0 < \varepsilon_2 < b$  е неустойчив фокус.



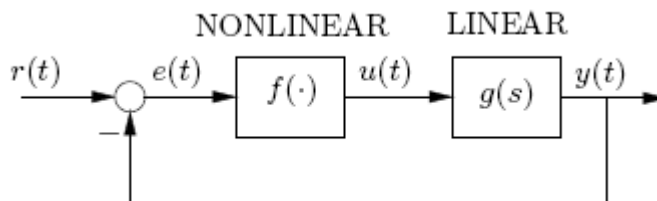
Фиг. 1.6. Компютърна симулация на (1.45).

## ГЛАВА 2. ОСНОВНИ МЕТОДИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА КНМ

### 2.1. МЕТОД НА ХАРМОНИЧНИЯ БАЛАНС

Методът на Хармоничният баланс (МХБ) е много точен метод за симулиране на нелинейни вериги. Той намира решенията за устойчивите състояния на веригите директно в честотната област, което е по-лесен начин за представяне на резултатите и намалява изчислителната сложност [18, 19].

Обикновено МХБ се представя със следната схема за обратна връзка (Фиг. 2.2.):



Фиг. 2.2. Обратна-захранваща система

Тя съдържа линейна система с преходна функция  $g(s)$  и нелинейност  $f(\cdot)$  (може да бъде насищане, хистерезис и др.). За простота разглеждаме случая, когато  $r = 0$ . Нека вземем следното пробно решение:

$$e(t) = E \sin(\omega t)$$

Ако изходът към нелинейността е периодичен с честота  $\omega$  представяме редовете на Fourier като:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k \sin(k\omega t) + V_k \cos(k\omega t))$$

Съответните коефициенти на Fourier към основният хармоник са дадени с:

$$U_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(E \sin \omega t) \sin \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(E \sin \theta) \sin \theta d\theta,$$

$$V_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(E \sin \theta) \cos \theta d\theta$$

Сега нека разгледаме приближението:

$$u(t) \approx U_1 \sin(\omega t) + V_1 \cos(\omega t)$$

като вход на линейната система. В устойчивото състояние изходът на нелинейната система е:

$$\begin{aligned} y(t) &= |g(j\omega)| [U_1 \sin(\omega t + \phi) + V_1 \cos(\omega t + \phi)] = \\ &= \text{Im} \left[ |g(j\omega)| (U_1 + jV_1) e^{j\omega t + \phi} \right] = \\ &= \text{Im} \left[ g(j\omega) (U_1 + jV_1) e^{j\omega t} \right] \end{aligned}$$

където  $\phi = \arg(g(j\omega))$  (отбелязваме, че когато  $g(s)$  се държи като ниско-преминаващ филтър пренебрегваме по-високите хармоници).

Чрез критерия на Nyquist може да се предскаже устойчивостта на даден граничен цикъл.

## 2.2. ИЗСЛЕДВАНЕ НА ДИНАМИКАТА НА КНМ ЧРЕЗ МХБ

Основното приложение на МХБ е за прогнозиране на граничните цикли в нелинейни системи. Други приложения на този метод са прогнозиране на подхармоници, явления със скоци и отговор на нелинейните системи към синусоидалните входове.

Добре известно е, че явлението граничен цикъл е нелинейна автономна система, която допуска представяне на Lur'e [18, 19]. Методът се състои основно от две стъпки:

1. Сигналът, влизащ през нелинейния блок на схемата на Lur'e се приближава с помощта на подходящ синусоидален член, чиито честота и амплитуда са неизвестни.

2. По-високият ред на харmonicите, възникващи на изхода на нелинейния блок се пренебрегват, т.е. нелинейният блок е заменен от константно нарастване и има същия вход, което минимизира средната квадратична грешка между изхода от нелинейността и този от самото нарастване [19].

Нека разгледаме схема на Lur'e, като  $\mathcal{L}$  е линейна независима по времето динамична система, а  $N$  е нелинейна независима по времето

статична система без памет. Блокът  $\mathcal{L}$  може да се опише от преходната функция:

$$L(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad (2.7)$$

където  $s$  е комплексна променлива, а  $p(\cdot)$  и  $q(\cdot)$  са полиномни оператори, докато блокът  $N$  е представен чрез нелинейна функция на една променлива  $n(\cdot)$ . Диференциалното уравнение описващо тази система е:

$$q(D)y(t) + p(D)n[y(t)] = 0 \quad (2.8)$$

където  $D$  е диференциален оператор. Приемаме, че съответния нелинеен изход  $n[y_0(t)]$  е развит в реда на Fourier:

$$n[y_0(t)] = N_0(A, B)A + N_1(A, B)B \cos \omega t + \dots \quad (2.10)$$

Нелинейната система  $N$  се характеризира приблизително (по отношение на периодичния режим на равновесното състояние) чрез реалното нарастване на входа и честотата  $\omega$ :

$$N_0(A, B) = \frac{1}{2\pi A} \int_{-\pi}^{\pi} n[y_0(t)] d\omega t \quad (2.11)$$

$$N_1(A, B) = \frac{1}{\pi B} \int_{-\pi}^{\pi} n[y_0(t)] \cos \omega t d\omega t \quad (2.12)$$

които са добре известни описващи функцията членове. Като разширение може да се дефинира по-високо нарастване на честотата  $N_k(A, B)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , която описва останалите периоди от (2.10).

**Определение 2.2.: Прогнозиране на гранични цикли.** Приблизителните периодични решения  $y_0(t)$  на система, получени чрез прилагане на метода на описващата функция. Условията за предсказване на гранични цикли са:

$$A[1 + N_0(A, B)]L(0) = 0 \quad (2.15)$$

$$1 + N_1(A, B)L(j\omega) = 0 \quad (2.16)$$

Нека запишем линейната КНМ (1.4) в следния вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_{ij}(t) = -x_{ij}(t) + \sum_{kl \in N_r} A_{k+i, l+j} x_{kl}(t) + \sum_{kl \in N_r} B_{k+i, l+j} u_{kl}(t) + I, \\ 1 \leq i, k \leq N_1, 1 \leq j, l \leq N_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$



Алгоритмът за изучаване динамиката на КНМ, който прилагаме по-нататък в дисертацията и базиран на МХБ е следния:

1. Записваме статичното уравнение на КНМ състояние на уравнение (2.17) във векторна форма. Търсим периодични решения от вида:

$$x_i = \xi(\Omega_0 l + \omega_0 t) \quad (2.18)$$

за функция  $\xi: R \rightarrow R$  и  $0 \leq \Omega_0 < 2\pi$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T$ , където  $T_0 > 0$  е минималния период. Забелязваме, че времевата честота  $\omega_0$  и пространствената честота  $\Omega_0$  са част от решението и трябва да се определят. Приемаме, че  $x_l(t)$  е периодично с минимален период  $T_0$ . Получаваме:

$$\Omega_0 = \frac{k}{n} \omega_0 T_0 = \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (2.21)$$

където обхвата от стойности за  $k$  е определен от условието  $0 \leq \Omega_0 \leq 2\pi$ .

Допускаме, че тази функция е не само периодична, но и удовлетворява:

$$\xi(\Omega_0 l + \omega_0 t) = -\xi(\Omega_0 l + \omega_0 t + (2k+1)\pi) \quad (2.22)$$

за някое  $k \in N$ .

2. Прилагаме Непрекъсната по Времето и Дискретна в пространството Трансформация на Fourier (НВДТФ) от крайното дискретно пространство  $l$  и непрекъснатото време  $t$  към дискретната пространствена честота  $\Omega$  и непрекъснатата времева честота  $\omega$ :

$$\tilde{X}_\Omega(\omega) = \tilde{X}_k(\omega) = \sum_{l=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} x_l(t) e^{-i(2\pi kl/n + \omega t)} dt \quad (2.23)$$

Следователно преходната функция [44,124] е от вида:

$$\tilde{H}_\Omega(\omega) = \frac{\tilde{X}_\Omega(\omega)}{\tilde{Y}_\Omega(\omega)} \quad (2.24)$$

3. Предполагаме, че статичната променлива на КНМ има вида:

$$x_l(t) = X_{m_0} \sin(\omega_0 t + l\Omega_0). \quad (2.25)$$

Апроксимираме периодичния изход на КНМ  $y_l(t) = f(x_l(t))$  чрез основните компоненти на реда на Fourier налагаме следните ограничения за реалните и имажинерни части на преходната функция:

$$\Re\{\tilde{H}_{\Omega_0}(\omega_0)\} = \frac{X_{m_0}}{Y_{m_0}} \quad (2.28)$$

$$\Im\{\tilde{H}_{\Omega_0}(\omega_0)\} = 0 \quad (2.29)$$

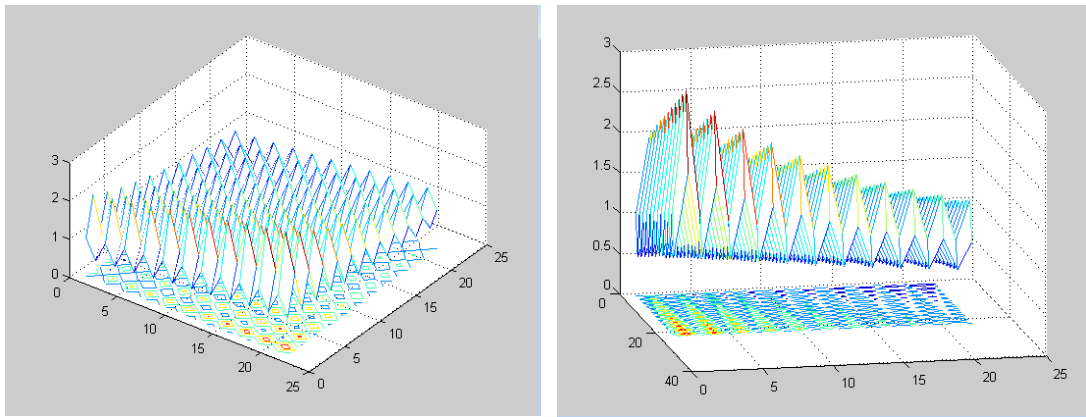
5. Накрая, ако за дадена стойност на  $\Omega_0$  можем да намерим решението  $(\omega_0, X_{m_0})$  на горните две уравнения, то метода на описващата функция предсказва съществуване на периодично решение с амплитуда приблизително  $X_{m_0}$  и минимален период, приблизително  $T_0 = 2\pi / \omega_0$ .

Прилагайки този метод представяме КНМ като система на Лур'е.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= -x_i(t) - s y_{i-1}(t) + p y_i(t) + s y_{i+1}(t) \\ y_i(t) &= f(x_i(t))\end{aligned}\tag{2.30}$$

където нелинейността  $f(.)$  е частично линейна функция  $f(x) = (|x+1| - |x-1|)/2$  и  $s > \frac{p-1}{2}$ , така че мрежата оперира в режим на глобално разпространение.

За да се потвърди достоверността на постигнатия резултат представяме симулации за  $N=20$ ,  $p=2$  и  $s=3$ . Съгласно Твърдение 2.1., мрежата притежава най малко 9 периодични решения.



Фиг. 2.7. Симулации на (2.30).

## ГЛАВА 3. ДИНАМИКА НА КНМ НА РЕАКЦИЯ-ДИФУЗИЯ.

### 3.1. ДИНАМИЧНО ПОВЕДЕНИЕ. УСТОЙЧИВОСТ НА КНМ НА РЕАКЦИЯ-ДИФУЗИЯ

До тук ние разгледахме само напълно устойчиви КНМ, които безспорно имат най-много приложения. В параграф 3.1.1 ще покажем, че не всички КНМ са напълно устойчиви. Действително някои темплети на КНМ ще доведат до периодично осцилиращо устойчиво състояние. Други могат да се проявят с неустойчиво, непериодично поведение, наречено хаос.

#### 3.1.1. ГЕНЕРИРАНЕ НА КНМ С ДВЕ КЛЕТКИ

Разглеждаме двуклетъчни КНМ, характеризиращи се с нулево гранично условие и следните темплети:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Използваме следното обозначение за КНМ с  $M \times N = 1 \times 2$  КНМ със синаптични тегла на обратна връзка  $a_{0,-1} = \beta$ ,  $a_{0,0} = \alpha$  и  $a_{0,1} = \beta$ , които могат да бъдат представени като граф. Уравнението за тази КНМ е

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \alpha y_1 - \beta y_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + \alpha y_2 + \beta y_1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тук изходът  $y_i$  е представен по стандартния начин със сигмоидна нелинейност.

$$y_i = f(x_i) = 0.5 |x_i + 1| - 0.5 |x_i - 1| \quad (3.2)$$

Решенията на уравнение (3.1) за  $\alpha = 2$  и  $\beta = 2$  и начално условие:  $x_1(0) = 0.1$  и  $x_2(0) = 0.1$ . Наблюдаваме, че вместо да клонят към dc равновесна точка, статичните променливи  $x_1$  и  $x_2$  се сходят към периодичния вълнов фронт.

В дисертацията сме показали чрез подходящи примери, че всички траектории които започват от някое начално условие, без координатното начало, клонят към *граничен цикъл*.

### 3.1.2. ХАОТИЧНИ КНМ С ДВЕ КЛЕТКИ И ЕДИН СИНУСОИДАЛЕН ВХОД

Допускаме, че имаме синусоидален вход от вида:  $u_{11}(t) = 4.04 \sin(\frac{\pi}{2}t)$  към клетка  $C(1, 1)$  на дву-клетъчна КНМ и избираме  $\alpha = 2$  и  $\beta = 1.2$  като нейни параметри. В този случай при същите “нулеви” граничните условия статичното уравнение (3.1) обобщава следната неавтономна система от две нелинейни диференциални уравнения.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2y_1 - 1.2y_2 + 4.04 \sin(\frac{\pi}{2}t) \quad (3.7)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + 1.2y_1 + 2y_2$$

където  $y_i = f(x_i)$  е определено от уравнение (3.2). Уравнение (3.7) е статично уравнение на  $1 \times 2$  КНМ с темплети:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.2 & 2 & -1.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

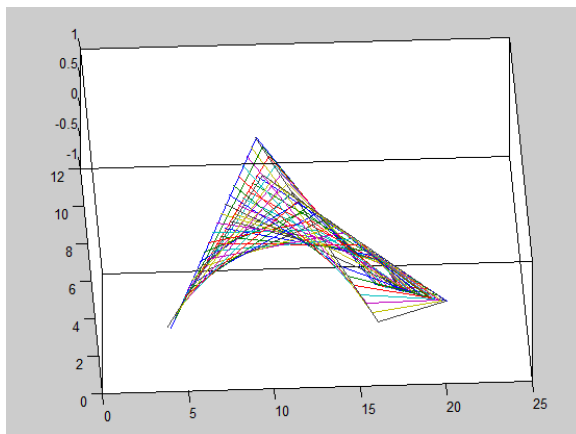
Фиг. 3.5.

с нулеви гранични условия; синусоидален вход  $u_{11}(t)$  към клетката  $C(1, 1)$  и нулев вход  $u_{12}(t) = 0$  към клетката  $C(1, 2)$ . Забелязваме, че тези два вълнови фронта не клонят към периодичен вълнов фронт при  $t \rightarrow \infty$ .

От теорията за нелинейна динамика вълновите фронтове, възприемани като шум могат да се нарекат **хаотични**, а свързващата ги траектория се нарича **странен атрактор**, тъй като другите решения, съответстващи на съседните начални условия ще бъдат атрактори и ще се доближават до някоя траектория.

Изчертаваме решенията  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  в равнината  $x_1 - x_2$  за  $t = 0, 4, 8, 12, 16$  и получаваме странен атрактор от пример 3.4, който често се нарича **атрактор дамска обувка**.

**Пример 3.4.:** Експериментално странный атрактор от вида дамска обувка е даден на фигурата по-долу:



Фиг.3.9. Симулация на страниен атрактор от вида дамска обувка.

### 3.1.3.ПЪЛНА УСТОЙЧИВОСТ НА СИМЕТРИЧНИ А ТЕМПЛЕТИ

В предишния параграф се вижда, че КНМ само с две клетки, могат да не бъдат напълно устойчиви. Следващата теорема гарантира пълната устойчивост на важен подклас КНМ. За простота предполагаме, че нелинейната функция  $y_{ij} = f(x_{ij})$  е ограничена, диференцируема и има положителен наклон навсякъде. Физическата реализация на  $f(x_{ij})$  е гладка, а не частично- линейна функция.

#### **Теорема 3.1. за пълна устойчивост:**

*Всяка  $M \times N$  КНМ с произволно разстояние между съседните клетки, с постоянни входове и постоянен праг е напълно устойчива, ако са изпълнени следващите три хипотези:*

1. *Темплетът  $A$  е симетричен*

$$A(i, j; k, l) = A(k, l; i, j) \quad (3.8)$$

2. *Нелинейната функция  $y_{ij} = f(x_{ij})$  е диференцируема, ограничена*

*и*

$$f'(x_{ij}) > 0 \text{ за всички } -\infty < x_{ij} < \infty \quad (3.9)$$

3. *Всички равновесни точки са изолирани.*

В дисертационния труд е представено доказателството на теоремата за пълна устойчивост.

### 3.1.4. ПОЛОЖИТЕЛНИ И СИМЕТРИЧНИ ПО ЗНАК $A$ ТЕМПЛЕТИ. ПЪЛНА УСТОЙЧИВОСТ

Тук представяме друг критерий за пълна устойчивост, който зависи само от „знака”, а не от „стойността” на елементите на темплата  $A$ .

**Определение 3. 1.:** Симетрия по знак на темплата  $A$ . Нека с  $A_{180}$  означим темплата  $A$  завъртян на 180 градуса по отношение на центъра на темплата. Нека с  $a_{ij}$  и  $a'_{ij}$  означим съответните  $i$  и  $j$  елементи на  $A$  и  $A_{180}$ . Казваме, че темплата  $(2r+1) \times (2r+1)A$ , където  $r$  е радиуса на сферата на въздействие  $S_r(ij)$ , е симетричен по знак, тогава и само тогава, когато  $a_{ij}$  и  $a'_{ij}$  са и двете или положителни, или отрицателни, или нулеви за всяко  $i, j = 1, 2, \dots, 2r+1$ .

Горната дефиниция е еквивалентна на условието, че  $a_{ij}$  и  $a_{-i-j}$  са и двете или положителни, или отрицателни или нулеви за всяко  $(i, j) \neq (0, 0)$ , където двойните знаци съответстват на Декартовата координатна система, чието начало е центъра на темплата. Показаният пример съответства на  $5 \times 5$   $A$  темплет (фиг. 3.11.а). За да определим дали този темплет е симетричен по знак ние първо завъртаме  $A$  на 180 градуса, за да получим съответния  $A_{180}$  темплет на фиг. 3.11.б. Построяваме съответните “знакови” темплети, означени като  $\text{sgn}[A]$  и  $\text{sgn}[A_{180}]$ , свързващи символът  $+$ ,  $-$  или  $0$  за всяко входно  $a_{ij}$ , където  $a_{ij} > 0$ ,  $a_{ij} < 0$  или  $a_{ij} = 0$ , в  $A$  и  $A_{180}$  темплата.

$A =$	-2	0	7	-5	0
	1	6	0	-2	-6
	0	2	4	3	0
	-4	-3	0	6	2
	0	-6	8	0	-3
a)					
$A_{180} =$	-3	0	8	-6	0
	2	6	0	-3	-4
	0	3	4	2	0
	-6	-2	0	6	1
	0	-5	7	0	-2
б)					
$\text{sgn}[A] = \text{sgn}[A_{180}]$					
	-	0	+	-	0
	+	+	0	-	-
	0	+	+	+	0
	-	-	0	+	+
	0	-	+	0	-
в)					

Фиг. 3.11.а) Несиметричен  $5 \times 5$   $A$  темплет ( $A \neq A^T$ ), 3.11.б)  $A_{180}$ , което е завъртане на  $A$  на 180 градуса по отношение на центъра на темплата, 3.11.в) знаците на съответните коефициенти на  $A$  и  $A_{180}$  са идентични на знаковия темплет  $\text{sgn}[A]$ , чиито входове се състоят от  $+$ ,  $-$  и  $0$

Тогава  $A$  темплетът е симетричен по знак тогава и само тогава, когато

$$\operatorname{sgn}[A] = \operatorname{sgn}[A_{180}] \quad (3.26)$$

Всички следващи условия относно знаците на синаптичните тегла  $a_{ij}$  на  $A$  темплет наричаме „**синаптични тегловни условия**”.

**Определение 3.2.:** Синаптични тегловни условия:

Синаптично тегловно условие 1:

$$a_{kl} \geq 0 \text{ за всички } (k, l) \neq (0, 0) \quad (3.27)$$

Синаптично тегловно условие 2:

$$\begin{aligned} a_{kl} &\geq 0 \text{ за всички } (k, l) \neq (0, 0) \text{ и „четни” } k \\ a_{kl} &\leq 0 \text{ за всяко „нечетно” } k \end{aligned} \quad (3.28)$$

Синаптично тегловно условие 3:

$$\begin{aligned} a_{kl} &\geq 0 \text{ за всички } (k, l) \neq (0, 0) \text{ и „четни” } l \\ a_{kl} &\leq 0 \text{ за всяко „нечетно” } l \end{aligned} \quad (3.29)$$

Синаптично тегловно условие 4:

$$\begin{aligned} a_{kl} &\geq 0 \text{ за всички } (k, l) \neq (0, 0) \text{ и „четни” } (k+l) \\ a_{kl} &\leq 0 \text{ за всяко „нечетно” } (k+l) \end{aligned} \quad (3.30)$$

**Теорема 3.2. за пълна устойчивост:**

$M \times N$  КНМ с  $A$  темплета е напълно устойчив за произволен  $B$  темплет и произволен праг  $z$ , ако следващите 3 условия са изпълнени:

1. темплетът  $A$  е симетричен по знак;
2. темплетът удовлетворява някое от четирите синаптични тегловни условия;
3. всички равновесни точки са изолирани.

В дисертационния труд е представено доказателството на специален случай на тази теорема.

## 3.2. ХАОС В КНМ НА РЕАКЦИЯ-ДИФУЗИЯ

### 3.2.1. УРАВНЕНИЕ НА NEWELL- WHITEHEAD

Уравненията на реакция-дифузия се използват широко за описание на явленията в различни области, като биологичния модел на Fisher [8], модела на проводимост на неврони – FitzHugh-Nagumo [8, 32, 33], химическия

бруселаторен модел, физическия модел на Sine Gardon [33], и др. Така нареченото уравнение на Newell-Whitehead описва обвивката на модулиращите решения с две големи разширения или неограничени пространствени направления.

В дисертацията изучаваме динамиката на уравнението на Newell Whitehead от вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au - bu^3 \quad (3.31)$$

където  $a$  и  $b$  са положителни параметри. Това уравнение е параболично ЧДУ от втори ред. Знае се, че някои автономни клетъчно невронни мрежи представляват отлично приближение на нелинейни частни диференциални уравнения. Вътрешната дискретна по пространството топология на КНМ има голямо значение за получаване на решенията в реално време. Нека разгледаме следващото частно диференциално уравнение, което е добре познато в литературата като „уравнение на реакция-дифузия”.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D\nabla^2 u$$

където  $u \in R^N$ ,  $f \in R^N$ ,  $D$  е матрица с дифузионни коефициенти, и  $\nabla^2 u$  е Laplacian оператор в  $R^2$ . Има няколко начина за намиране на приближения оператор на Laplacian в дискретното пространство на КНМ с подходящ  $A$ -темплет.

Нека проектираме променливата  $u(x, t)$  в КНМ слой като статичен волтаж на клетка  $u_j(t)$  в мрежата от точки  $j$ , така че  $u(jh, t)$ ,  $h = \Delta x$ . Следователно едномерният Laplacian темплет ще бъде от следния вид:

$$A_1 = (1, -2, 1)$$

и КНМ модел на (3.31) е:

$$\frac{du_j}{dt} = (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + au_j - bu_j^3 \quad (3.32)$$

$j = 1, \dots, n$ ,  $n = M.M$ , където имаме  $M \times M$  клетки.

### 3.2.2. ПОЛИНОМЕН КНМ МОДЕЛ

Разглеждаме  $m$ -слойна полиномна КНМ с клетки  $C^1(i)$  (подредени в едномерна решетка във всеки слой), предполагайки само взаимовръзките между близките слоеве със следното статично уравнение:



$$\dot{x}_i^l(t) = f^l(x_i^1, \dots, x_i^l, \dots, x_i^m) + \sum_{i_1=-1}^1 \dots \sum_{i_n=-1}^1 x_{i+i_n}^l a_{i_n} \quad (3.33)$$

където  $l=1, \dots, m$ ,  $j_j$  е  $j$ -тия компонент на индексния вектор  $i$  ( $i_j \in \{-1, 0, 1\} \forall j \in N$ ),  $i$  е пространствен независим вектор и  $a_{i_n}$  са елементите на  $A$ -темплета.

Разглеждаме следното опростено представяне на  $f^l(.)$

$$f^l(x_i^1, \dots, x_i^m) = P_{l,l}(x_i^l) + P_{l,l-1}(x_i^{l-1}) + P_{l,l+1}(x_i^{l+1}) \quad (3.34)$$

с функции  $P_{l,l'}(.)$  определящи полиномът:

$$P_{l,l'}(x_i^{l'}) = \sum_{k=0}^K b_{ll'}^{(k)} (x_i^{l'})^k$$

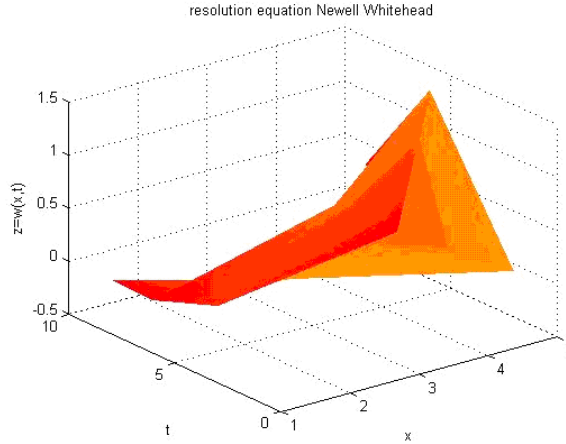
За уравнение (3.31) на реакция-дифузия на Newell-Whitehead, съответният полиномен КНМ модел може да се запише като следната система:

$$\frac{d u_j}{dt} = A_1 * u_j + f(u_j), \quad 1 \leq j \leq N \quad (3.35)$$

където  $A_1: (1, -2, 1)$  е едномерен дискретизиран Laplacian темплет,  $*$  е конволюционен оператор, променливата  $u$  от (3.31) е проектирана на КНМ на реакция-дифузия от полиномиален ред три и клетъчното състояние  $u_j$  представлява решението  $u$ , водещо до уравнението на състоянието дадено с (3.35). Тук

$$f(u_j) = b_1(u_j) + b_2(u_j)^2 + b_3(u_j)^3 + v_1$$

е развитие на реда на Taylor за функцията  $f(u) = au - bu^3$ . Численото интегриране на КНМ модел (3.35) с начални условия  $u_j(0) = 0$  води до решения, които са показани на Фиг. 3.18.



Фиг.3.18. Числена симулация на КНМ модел (3.35).

**Забележка 3.2.:** За да построим модел на системата представяща решенията на (3.31), използвайки полиномен КНМ модел (3.35), коефициентите  $b_i$  трябва да се определят в оптимизационен процес. По време на оптимизационния процес квадратичната грешка

$$e_{mse} = \sum_i \sum_j \sum_{l=1}^2 \frac{(u_j^l - \tilde{u}_j^l)^2}{n}$$

може да бъде минимизирана, използвайки метода на Pauels [34]. На всяка стъпка се изчислява  $e_{mse}$ , като вземаме за референтна стойност -  $u_j^l(t)$  и изход  $\tilde{u}_j^l$  на полиномната КНМ, получен чрез системата MatLab, прилагайки интегриране на Runge-Kutta от 4 ред. За да извършим минимизиране на изчислителната сложност и да максимизираме значението на квадратичната грешка, вземаме изходите само на 10 клетки.

### 3.2.3. РЪБ НА ХАОСА В КНМ МОДЕЛ НА NEWELL-WHITEHEAD

Възниква въпросът какви стойности да дадем на клетъчните параметри, за да може системата да бъде свързана? Отговорът е даден в [11, 12]-необходимото условие за неконсервативна система да показва сложно поведение е нейните клетки да са локално активни. Определянето на област от клетъчни параметри за локално активните клетки, се нарича „*ръб на хаос*” [12, 17].

Предлагаме следния конструктивен алгоритъм за определяне на ръба на хаос в КНМ модел (3.35):

1. Разглеждаме уравнение (3.31) на Newell-Whitehead и намираме неговия Полиномен КНМ Модел на Newell-Whitehead в следния вид:

$$\frac{d\mathbf{u}_j}{dt} = \mathbf{A}_1 * \mathbf{u}_j + f(\mathbf{u}_j), \quad 1 \leq j \leq N \quad (3.36)$$

2. Намираме равновесните точки  $\mathbf{u}^*$  на (3.36):

$$\mathbf{A}_1 * \mathbf{u}^* + f(\mathbf{u}^*) = F(\mathbf{u}^*) = 0 \quad (3.37)$$

Уравнение (3.37) може да има 1, 2 или 3 реални корена, съответно  $\mathbf{u}_1^*$ ,  $\mathbf{u}_2^*$ ,  $\mathbf{u}_3^*$ . В общият случай тези корени са функция на клетъчните параметри  $a$  и  $b$ . Така получаваме  $\mathbf{u}_k^* = \mathbf{u}_k^*(a, b)$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

3. Изчисляваме Якобиан на (3.37) за всяка системна равновесна точка  $\mathbf{E}_1^* = (\mathbf{u}_1^*)$ ,  $\mathbf{E}_2^* = (\mathbf{u}_2^*)$ ,  $\mathbf{E}_3^* = (\mathbf{u}_3^*)$ . В нашият случай матрицата на Якоби е:

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}_1 + (a - 3b(\mathbf{u}^*)^2) \mathbf{I}_d \quad (3.39)$$

$\mathbf{I}_d$  е тъждествена матрица.

4. Изчисляваме областта

$$\mathbf{T}_r(\mathbf{E}_k^*) = \sum_{q=1}^N \lambda_q = \text{trace} \left[ \mathbf{A}_1 + (a - 3b(\mathbf{u}^*)^2) \mathbf{I}_d \right]$$

5. Идентифицираме клетъчните статични променливи  $u_j$  като волтаж  $u_j$  във възела ( $j$ ) на двумерната решетка  $G$  от линейни резистори.

**Определение 3.3.:** Устойчивата и локално активна област  $SLAR(\mathbf{E}_k)$  на равновесната точка  $\mathbf{E}_k$  за Полиномния КНМ Модел на уравнението на Newell-Whitehead (3.31) е тази, в която  $\mathbf{T}_r < 0$ .

В нашия частен случай ние получаваме:

$$\mathbf{T}_r(\mathbf{E}_1^* = 0) = -2 + a \quad (3.40)$$

$$\mathbf{T}_r(\mathbf{E}_{1,2}^* = \pm \sqrt{\frac{a+1}{b}}) = -5 - 2a \quad (3.41)$$

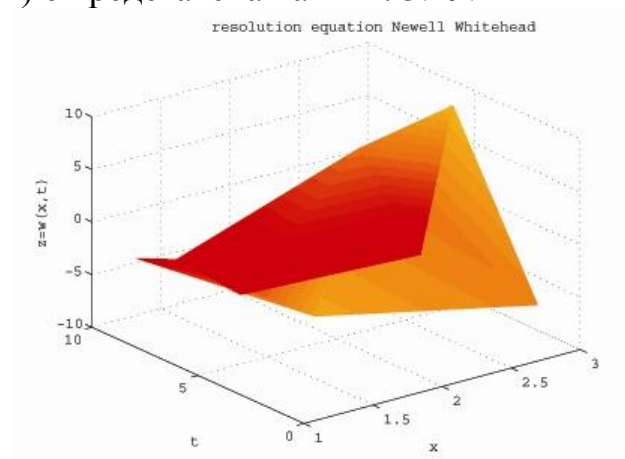
За да се изпълни условието от Определение 3.3 е необходимо клетъчните параметри да удовлетворяват следното неравенство  $a > -5/2$ ,  $b > 0$ . Тогава:

$$SLAR(\mathbf{E}_k): a > -5/2, b > 0 \quad (3.42)$$

6. В литературата [11, 12, 17] ръб на хаос означава *област в параметровото пространство на динамична система, където могат да се появят сложно поведение и обработка на информацията.*

**Теорема 3.7.:** *Полиномният КНМ Модел на уравнението на Newell-Whitehead (3.31) оперира в областта ръб на хаос, ако  $a > -5/2$ ,  $b > 0$ . За тези стойности на параметрите трябва да съществува поне една равновесна точка, която принадлежи на  $(SLAR(E_k))$ .*

Областта ръб на хаос за Полиномния КНМ Модел на уравнението на Newell-Whitehead (3.31) е представена на Фиг. 3.19.



Фиг.3.19. Област на ръба на хаос за полиномен КНМ модел на уравнението на Newell-Whitehead

## ГЛАВА 4. РЕШЕНИЯ ОТ ТИП БЯГАЩИ ВЪЛНИ В КНМ

### 4.1. СТРУКТУРА НА РЕШЕНИЯТА ОТ ТИП БЯГАЩИ ВЪЛНИ В КНМ

В дисертацията изучаваме структурата на решенията от тип бягащи вълни в КНМ (виж [1, 9, 21, 23]). КНМ в  $Z^2$  или  $Z^1$ , без входове, които имат вида:

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = -x_{ij} + z + \sum_{|k| \leq d, |l| \leq d} a_{k,l} f(x_{i+k, j+l}), \quad (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \quad (4.1)$$

или

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = -x_i + z + \sum_{|l| \leq d} a_l f(x_{i+l}), \quad i \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

Тук нелинейността  $f$  е частично линейна функция (т.е.  $f(x) = (1/2)(|x+1| - |x-1|)$ ). Променливата  $z$  се нарича „праг“, а числата

$a_{k,l}$  могат да бъдат подредени в  $(2d+1) \times (2d+1)$  матрица  $A$ , която се нарича „**пространствено инвариантен темплет**”.

Изучаването на решенията от тип бягащи вълни може да се стане по следния алгоритъм. Нека  $\theta \in R$  е дадено и разглеждаме решенията на (4.1) или (4.2) от вида:

$$x_{i,j}(t) = \phi(i \cos \theta + j \sin \theta - ct) \quad (4.3)$$

или

$$x_i = \phi(i - ct) \quad (4.4)$$

за някои непрекъснати функции  $\phi: R^1 \rightarrow R^1$  и неизвестно реално число  $c$ . Решението (4.3) (или (4.4)) на системата (4.1) (или (4.2)) се нарича „**решение от тип бягаща вълна**” на (4.1) (или (4.2)). Означаваме  $s = i \cos \theta + j \sin \theta - ct$  (или  $s = i - ct$ ). Тогава  $\phi(s)$  и  $c$  удовлетворяват уравнението от вида:

$$-c\phi'(s) = G(\phi(s + r_0), \phi(s + r_1), \dots, \phi(s + r_N)) \quad (4.5)$$

тук  $r_0 = 0$ ,  $r_i$  са реални числа за  $i = 1 \dots N$ . Уравнения (4.5) ((4.1) или (4.3)) се наричат „**биустойчиви**”, ако има три пространствено хомогенни решения  $\phi(s) \equiv x^-$ ,  $x^0$  и  $x^+$ , удовлетворяващи  $x^- < x^0 < x^+$  и

$$G(x, x, \dots, x) > 0 \text{ за } x \in (-\infty, x^-) \cup (x^0, x^+),$$

$$G(x, x, \dots, x) < 0 \text{ за } x \in (x^-, x^0) \cup (x^+, \infty)$$

Нека уравнение (4.5) е биустойчиво. Mallet-Paret в [23] показват, че (4.5) има единствено монотонно решение, удовлетворяващо граничните условия:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \phi(s) = x^- \text{ и } \lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s) = x^+ \quad (4.7)$$

Когато  $G$  е квази-монотонно и удовлетворява множество от условия, Hsu и Lin в [21] доказват, че съществува фамилия от монотонни решения на (4.5), удовлетворяващи граничните условия:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \phi(s) = x^0 \text{ и } \lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s) = x^+ \quad (4.8)$$

Целта ни е да изучим структурата на решенията от типа бягаща вълна на едномерна КНМ. Разглеждаме решението  $\phi(s; c)$  на:

$$-c\phi'(s; c) = -\phi(s; c) + \alpha f(\phi(s; c)) + \beta f(\phi(s+1; c)) \quad (4.10)$$

удовлетворяващо:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s; c) = x^+ \quad (4.11)$$

за всяко  $c < 0$ , където  $x^+ = a + \beta$  и  $f(x) \equiv f_\varepsilon(x)$ , ( $\varepsilon > 0$ )

$$f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ако } x \geq \varepsilon \\ \frac{x}{\varepsilon} & \text{ако } |x| \leq \varepsilon \\ -1 & \text{ако } x \leq -\varepsilon \end{cases} \quad (4.12)$$

или  $f(x) \equiv f_0(x)$ ,  $f_0$  е функция, определена по следния начин:

$$f_0(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{ако } x > 0 \\ [-1, 1] & \text{ако } x = 0 \\ \{-1\} & \text{ако } x < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Това е един от основните резултати:

**Теорема 4.1.:** Допускаме, че  $f = f_1$ ,  $a > 0$ ,  $\beta > 0$  и  $a + \beta > 1$ . Нека  $x^{\pm} = \pm(a + \beta)$ ,  $x^0 = 0$  и  $\phi(s; c)$  е решение на (4.10) и (4.11).

- (1) Допускаме, че  $a \geq 1 + \beta$ . Съществува  $C_* = C_*(a, \beta) < 0$ , такова че
- (i) ако  $c \leq C_*$ , тогава  $\phi(s; c)$  е ненамалжаващо и удовлетворява (4.8)
  - (ii) ако  $C_* < c < 0$ , тогава  $\phi(s; c)$  е осцилиращо и  $|\phi(s; c)| < 1$  за  $s < 0$
- (2) Допускаме, че  $a < 1 + \beta$ . Тогава съществува  $C_* = C_*(a, \beta)$ ,  $C_p = C_p(a, \beta)$  и  $C^* = C^*(a, \beta)$  с  $C_* \leq C_p \leq C^* < 0$ , такова че
- (i) ако  $c \leq C_*$ , тогава  $\phi(s; c)$  е ненамалжаващо и удовлетворява (4.8);
  - (ii) ако  $C_* < c < C_p$  тогава  $\phi(s; c)$  е осцилиращо;
  - (iii) ако  $C_p \leq c < C^*$ , тогава  $\phi(s; c)$  е евентуално периодично и  $\sup_{s < 0} |\phi(s; c)| > 1$ ;
  - (iv) ако  $c = C^* > C_*$ , тогава  $\phi(s; C^*)$  е ненамалжаващо и удовлетворява (4.7);
  - (v) ако  $C^* < c < 0$ , тогава  $\phi(s; c)$  е ненамалжаващо и неограничено.

В дисертацията са доказани редица резултати за структурата на решенията от тип бягаща вълна за различни КНМ и е направена класификация на осцилиращите и периодични решения на КНМ.

## 4.2. КНМ НА РЕАКЦИЯ-ДИФУЗИЯ. УРАВНЕНИЕ НА NEWELL-WHITEHEAD

Изучаваме КНМ модел на реакция-дифузия за уравнението на Newell-Whitehead:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au - bu^3 \quad (4.52)$$

За това уравнение въвеждаме подходяща клетъчно невронна мрежа:

$$\frac{d u_j}{dt} = (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + au_j - bu_j^3 \quad (4.53)$$

$j = 1, \dots, n$ ,  $n = M.M$ , където имаме  $M \times M$  клетки.

Прилагаме двойна трансформация на Fourier за КНМ модел (4.53) и получаваме:

$$sU = (z^{-1}U - 2U + zU) + aU - bU^3 \quad (4.54)$$

Означаваме с  $N(U) = aU - bU^3$  и тогава от (4.54) получаваме:

$$U(s, z) = \frac{1}{s - (z^{-1} - 2 + z)} N(U(s, z)) \quad (4.55)$$

В двойната трансформация на Fourier допускаме, че  $s = i\omega_0$ , и  $z = \exp(i\Omega_0)$ , където  $\omega_0$  е времевата честота,  $\Omega_0$  е пространствена честота.

Съгласно метода на описващата функция  $H(s, z) = \frac{1}{s - (z^{-1} - 2 + z)}$  е трансферна функция, която може да бъде представена отчитайки  $\omega_0$  и  $\Omega_0$ , т.е.  $H(s, z) = H_{\Omega_0}(\omega_0)$ .

Търсим възможни периодични решения на (4.54) от вида:

$$U_{\Omega_0}(\omega_0) = U_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0) \quad (4.56)$$

Представяме изхода по следния начин:

$$V_{\Omega_0}(\omega_0) = V_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0)$$

Съгласно метода на описващата функция разглеждаме първият хармоник, т.е.  $j = 0$ . Тогава можем да намерим амплитудата  $V_{m_0}$  на изхода с формулата:

$$V_{m_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N(U_{m_0} \sin \psi) \sin \psi d\psi = aU_{m_0} - 3/4bU_{m_0}^3 \quad (4.57)$$

От друга страна, ако заместим  $s = i\omega_0$  и  $z = \exp(i\Omega_0)$  в преходната функция  $H(s, z)$  получаваме:

$$H_{\Omega_0}(\omega_0) = \frac{1}{i\omega_0 - 2\cos\Omega_0 + 2} \quad (4.58)$$

Допускаме, че нашият КНМ модел (4.53) е краен кръгов масив от  $N$  клетки. За този случай получаваме пространствената честота:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4.61)$$

Така (4.59), (4.60) и (4.61) ни дават необходимите уравнения за намиране на неизвестните ни  $U_{m_0}$ ,  $\omega_0$ ,  $\Omega_0$ . Както споменахме по-горе ние търсим периодични вълнови решения на (4.53), следователно  $U_{m_0}$  определя приблизително амплитудата на вълната и  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  определя вълновата скорост. В сила е следното твърдение:

**Твърдение 4.1.:** КНМ модел (4.53) на уравнението на Newell-Whitehead (4.52) с кръгов масив от  $N$  клетки има статично периодично решение  $u_j(t)$  с пространствена честота  $\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N}$ ,  $0 \leq k \leq N-1$

#### 4.3. СТРУКТУРА НА РЕШЕНИЯТА ОТ ТИПА БЯГАЩА ВЪЛНА ЗА КНМ МОДЕЛ НА УРАВНЕНИЕТО НА NEWELL-WHITEHEAD

Разглеждаме КНМ модел (4.53). Решенията от тип бягаща вълна за него могат да бъдат представени по следния начин:

$$u_j(t) = u(\eta), \quad 1 \leq j \leq n \quad (4.62)$$

където  $\eta = t - jh$ ,  $h > 0$  е параметър. Забелязваме, че  $\eta$  е координатата движеща се в КНМ със скорост равна на  $c = 1/h$ . Заместваме (4.62) в (4.53) и получаваме:

$$\dot{u} = u(\eta - h) - 2u(\eta) + u(\eta + h) + N(u)$$

където точката означава първата производна по отношение на  $\eta$ . Нека  $N(u) = au(\eta) - bu^3(\eta)$ . Двете разлики  $[u(\eta - h) - u(\eta)] - [u(\eta) - u(\eta + h)]$  могат



да бъдат заменени приблизително с първите производни  $-\dot{u}/h$  и съответно  $+\dot{u}/h$ . Оттук, получаваме:

$$\dot{u} = \frac{1}{1+2c} N(u) \quad (4.63)$$

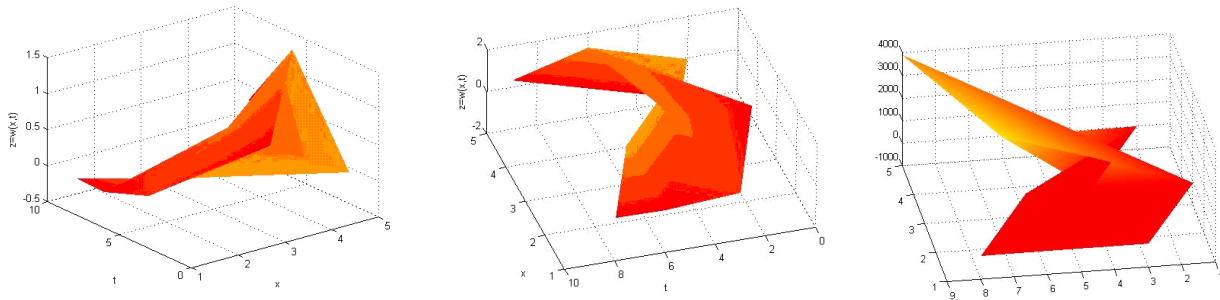
Очевидно  $u=0$  и  $u \equiv \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$  са решения на стационарната задача.

Следователно съществуват три равновесни точки  $E_0 = (0, 0)$  и  $E_1 = (\sqrt{\frac{a}{b}}, 0)$ ,  $E_2 = (-\sqrt{\frac{a}{b}}, 0)$ . В сила е следващата теорема за решенията от тип бягащи вълни на КНМ модел на уравнението на Newell-Whitehead (4.52):

**Теорема 4.3.:** За КНМ модел (4.53) на уравнението на Newell-Whitehead съществува  $c > 0$ , такова че да има:

- 1) хетероклинична орбита, свързваща равновесните точки  $E_0$  и  $E_1$  като бягащата вълна  $u(\eta)$  е строго монотонно нарастваща;
- 2) хетероклинична орбита, свързваща равновесните точки  $E_0$  и  $E_2$  като бягащата вълна  $u(\eta)$  е строго монотонно намаляваща.

Следващите симулации на КНМ модел са направени за различни стойности на клетъчните параметри.



Фиг. 4.2. Симулации на КНМ модел на уравнението на Newell-Whitehead.

## ГЛАВА 5. ПРИЛОЖЕНИЯ НА КНМ НА РЕАКЦИЯ ДИФУЗИЯ В РАЗПОЗНАВАНЕ И ОБРАБОТКА НА ОБРАЗИ.

### 5.1. ОСНОВНИ ДИФУЗИОННИ УРАВНЕНИЯ ЗА МОДЕЛИРАНЕ НА ШАБЛОНИ ПРИ ОБРАБОТКА НА ОБРАЗИ

Целта на тази глава е да дискутираме ролята на някои дифузионни уравнения в моделиране и шаблонно образуване, което е в основата на обработка на образите. Ние ще се ограничим с автономни уравнения и системи от типа реакция-дифузия. От гледна точка на шаблонното образуване се концентрираме главно на устойчивите свойства на тези уравнения/ системи при хомогенни гранични условия на Neumann.

#### 5.1.1. ЕДИНИЧНИ УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНИ УСЛОВИЯ НА NEUMANN

Започваме нашите изследвания на устойчивостта на решенията на единични уравнения с хомогенни гранични условия на Neumann:

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{в } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{в } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

където  $f \in C_1(R)$ ,  $\Omega$  е ограничена гладка област в  $R^n$ ,  $\nu$  е единичната външна нормала към  $\partial\Omega$ . За изследване на устойчивостта е най-добре да въведем съответната параболична начална гранична задача:

$$\begin{cases} v_t = \Delta v + f(v) & \text{в } \Omega \times R \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{в } \partial\Omega \times R \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{в } \Omega \end{cases} \quad (5.2)$$

Решението на (5.1) е равновесното състояние на (5.2) и решението на  $u$  от (5.1) е устойчиво, ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , такова че  $\|v(.,t) - u(.)\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon$  за всички  $t > 0$  при условие, че

$\|v_0 - u\|_{L^\infty(\Omega)} < \delta$ . Равновесното състояние  $u$  е асимптотично устойчиво,

ако съществува  $\delta > 0$ , такова че  $\|v(.,t) - u(.)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$  като  $t \rightarrow \infty$

при условие, че  $\|v_0 - u\|_{L^\infty(\Omega)} < \delta$ .

Основният резултат в този параграф е даден в следната теорема:

**Теорема 5.1.:** Ако  $\Omega$  е изпъкнала, тогава само устойчивите решения на (5.1) са константи.

### 5.1.2. ЕДИНИЧНИ УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНИ УСЛОВИЯ НА DIRICHLE

В този параграф изследваме устойчивостта, асимптотичната устойчивост, линеаризираната устойчивост и неустойчивост на решенията на единичните уравнения с хомогенни гранични условия на Dirichle

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{в } \Omega \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.6)$$

За уравнение (5.6) е в сила следния резултат:

**Твърдение 5.2.:** Нека  $\Omega$  е кръг или полуокръжност. Тогава устойчивото решение на (5.6) не трябва да си променя знака в  $\Omega$ .

Трябва да отбележим, че в общия случай ако  $\Omega$  е изпъкнала, устойчивото решение на (5.6) не е необходимо да има един знак. За обобщената нелинейност  $f(u)$  даже и положителните решения на (5.6) са често неустойчиви. За да гарантиране устойчивостта на положителните решения е необходимо да се ограничим със специални класове на нелинейност.

**Твърдение 5.3.:** Нека  $u$  бъде положително решение на (5.6) където  $f$  удовлетворява следното условие:

$$\frac{f(z)}{z} \text{ е намаляваща в } z > 0 \quad (5.8)$$

Тогава  $u$  трябва да бъде единственото положително решение на (5.6) и то да е устойчиво.

Добре познати примери включват случаят  $f(u) = e^{-u}$ . Подлинейният случай  $f(u) = u^\tau$ ,  $0 < \tau < 1$ , въпреки че  $C^1$  не е в  $R$  може да бъде решен по същия начин.

Доказателството на Твърдение 5.3 използва добре познатият „метод на монотонната итерация”.

### 5.1.3.СИСТЕМИ В СЯНКА

Установихме, че единичните уравнения с хомогенни гранични условия на Neumann са недостатъчни за моделирането на нетривиални шаблони. Следователно се нуждаем от системи уравнения, а системите  $2 \times 2$  вече допускат много устойчиви равновесни състояния на решенията с високо нетривиална шаблонност.

За  $2 \times 2$  системата:

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + f(u, v) & \text{в } \Omega \times [0, T) \\ v_t = d_2 \Delta v + g(u, v) & \text{в } \Omega \times [0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{в } \partial\Omega \times [0, T) \end{cases} \quad (5.9)$$

се знае, че когато двата дифузионни коефициента  $d_1, d_2$  са големи, динамиката на (5.9) се определя съществено от съответната система обикновени диференциални уравнения. Получава се също, че когато единия дифузионен коефициент, наречен  $d_2$  е голям, динамиката на (5.9) се определя от следната система в сянка (виж [20]):

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + f(u, \xi) & \text{в } \Omega \times [0, T) \\ \xi_t = \left| \Omega \right|^{-1} \int_{\Omega} g(u, \xi) dx & \text{в } [0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{в } \partial\Omega \times [0, T) \end{cases} \quad (5.10)$$

За да разберем основната идея, ние първо разглеждаме случая на равновесно състояние. В сила е следното твърдение:

**Твърдение 5.4.:** Допускаме, че  $f(u, v)$  и  $g(u, v)$  са от класа  $C^1$ . Тогава всяко пространствено, нехомогенно, немонотонно равновесно състояние на :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, \xi) & \text{в } (0, 1) \times [0, \infty) \\ u_x(0, t) = 0 = u_x(1, t) & t > 0 \\ \xi_t = \int_0^1 g(u, \xi) dx & t > 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

е неустойчиво.

## ГЛАВА 6. РАЗПОЗНАВАНЕ НА ОБРАЗИ С МЕТОДИ, ОСНОВАВАЩИ СЕ НА ЧДУ

Моделите основаващи се на ЧДУ, имат голямо приложение в предварителната обработка на изображения [2, 35]. Те могат да се класифицират в три основни категории: линейни изотропни филтри; нелинейни изотропни филтри; нелинейни анизотропни филтри.

Основният недостатък на методите основаващи се на ЧДУ е, че от изчислителна гледна точка те консумират много време и затова не са подходящи за обработка на изображения в реално време.

Заедно с нелинейните ЧДУ за обработката на изображения могат да се използват и КНМ [13]. Те се използват за решаване на някои по-сложни изчислителни задачи.

### 6.1. ОСНОВЕН ПОЛИНОМЕН КНМ МОДЕЛ НА PERONA-MALIK

Дефинираме нивото на сиво изображение като реалната ограничена функция  $u_0(x, y): R^2 \rightarrow R$ ;  $u_0(x, y)$  е стойността на нивото на сивота на точката  $(x, y)$ . Изучаваме нелинейна изотропна дифузия, която Perona-Malik, предлагат чрез следното ЧДУ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left[ g(\|\nabla u\|^2) \nabla u \right] \quad (6.1)$$

където оригиналното изображение  $u(0, x, y) = u_0(x, y)$  е използвано като начално условие,  $\nabla u$  и  $\|\nabla u\|$  означават градиент на изображението и съответно неговата големина;  $g(\cdot)$  представлява дифузионна функция. Допускаме, че всяко изображение  $u(t, x, y)$  изисква пространствено гранично условие от типа на Neumann.

Предлагаме следната дифузионна функция на Perona-Malik:

$$g(\|\nabla u\|^2) = e^{-\left(\frac{\|\nabla u\|}{k}\right)^2}, \quad g(\|\nabla u\|^2) = \left[ 1 + \left(\frac{\|\nabla u\|}{k}\right)^2 \right]^{-1} \quad (6.2)$$

където  $k$  е скаларен параметър.

Методът на крайните разлики за апроксимация на уравнение (6.1) на Perona-Malik е изучен в няколко статии [28], [35] и [36]. Допускаме, че непрекъснатата пространствена област се състои от  $N \times M$  точки, подредени в симетрична решетка и нека означим позициите на точките с два индекса  $(i, j)$ ;  $u_{ij}$  представлява стойността на пиксела, получена чрез проекция на изображението  $u(t, x, y)$  в точката  $(x_i, y_j) = (h_i, h_j)$ , където  $h$  е размера на

решетката. С помощта на метода на крайните разлики, последователният полудискретен модел (6.1) на Perona-Malik можем да запишем като [35] ( $1 \leq i \leq N$  и  $1 \leq j \leq M$ ):

$$\frac{d\mathbf{u}_{ij}(t)}{dt} = \sum_{(kl) \in N_{ij}} \frac{g_{kl} + g_{ij}}{2h^2} (\mathbf{u}_{kl} - \mathbf{u}_{ij}) \quad (6.3)$$

където  $N_{ij} = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$  и  $g_{kl}$  и  $g_{ij}$  се изчисляват чрез апроксимация на градиента на изображението върху централната разлика около точките  $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_l)$  и съответно  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ .

За да приложим (6.3) в общата полиномна КНМ архитектура разглеждаме следната основна функция:

$$f(z) = 1 - \left| \frac{1}{2} \left( \left| \frac{z}{m} + 1 \right| - \left| \frac{z}{m} - 1 \right| \right) \right| \quad (6.5)$$

и апроксимираме функциите  $g(\cdot)$  от (6.2) със следния израз:

$$\gamma(z) = \sum_{p=1}^Q C_p f^p(z) \quad (6.6)$$

Наблюдава се, че  $f(z)$  е различна от 0 само за ограничена област  $z \in (-m, m)$ . Това ни позволява да управляваме нелинейният процес на дифузия съобразно прага  $m$ . Следователно това свойство също е валидно за  $\gamma(z)$ .

Така получаваме общия базиращ се на нелинейно ЧДУ, полиномен КНМ модел (ПКНМ):

$$\frac{d\mathbf{u}_{ij}(t)}{dt} = \sum_{(kl) \in N_{ij}} \Gamma_{kl} (\mathbf{u}_{kl} - \mathbf{u}_{ij}) \quad (6.7)$$

$$\Gamma_{kl} = \sum_{p=1}^Q \frac{C_p}{2h^2} \left[ f^p(\|\tilde{\nabla} \mathbf{u}_{k,l}\|^2) + f^p(\|\tilde{\nabla} \mathbf{u}_{i,j}\|^2) \right] \quad (6.8)$$

### 6.1.1. АНИЗОТРОПНА ДИФУЗИЯ НА ОСНОВНИЯ ПОЛИНОМЕН КНМ МОДЕЛ

По-горните нелинейни дифузионни филтри използват скаларната дифузионна функция  $g(\cdot)$ , която зависи от променящата се структура на изображението, което не променя посоката си. В някои приложения е необходимо да ориентираме движението в съответствие с интересни свойства на функциите. За целта въвеждаме матрица на дифузия, която променя ориентацията на градиента.

Предлагаме следното анизотропно ЧДУ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}[D \nabla u] \quad (6.9)$$

където  $D$  е положително определена  $2 \times 2$  матрица, която зависи от градиента. Лесно е да получим линейната и нелинейна изотропна дифузия, чрез  $D = I$  и съответно  $D = g(\|\nabla u\|^2)I$  (където с  $I$  се означава тъждествената матрица).

Основният недостатък на изотропните модели е, че не са устойчиви при наличие на шум. За да се премахне шумът в краищата, е необходимо да се завърти потока по посока на ръбовете, да позволи дифузия по ръбовете и да предпази от дифузионна перпендикулярност. Това може да се получи чрез избор на матрици  $S$  и  $\Lambda$ , представени по-долу:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} g(\|\nabla u\|^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

## 6.2. ВЪВЕЖДАНЕ НА НОВ МЕТОД, ОСНОВАВАЩ СЕ НА ЧДУ ЗА ОБРАБОТКА НА ОБРАЗИ

Дифузията ефективно премахва шума на изображенията, като едновременно с това се подобрява обработката на ръбовете. Предлагат се различни филтри на нелинейно разпространение, които намират широко приложение при обработката на изображения, при намиране на ръбовете и при визуализацията. Общо свойство за всички нелинейни дифузионни модели е, че дифузионния коефициент е малък, докато градиента на образа е голям. Дифузионният коефициент е функция от конволюцията на ядрото на Gauss и намирането на решения изисква много изчисления за нелинейния дифузионен коефициент. Чрез цифровите експерименти намираме, че използвайки нелинейния дифузионен модел, премахването на шума не е достатъчно добро. Поради това предлагаме филтър на конвекция-дифузия, като се добави конвекционен член в модифицираното уравнение на дифузия, и това представлява физическата интерпретация на премахнатия шум. Целта ни е да се фокусираме върху алгоритъма за премахване на шума, за да извлечем поточна информация за изображението. Основната идея на нашия алгоритъм е да разсеем шума като следваме конвекционното направление през време на процеса. За да избегнем забавянето на процеса на изчисление ние използваме КНМ приближение.

### 6.2.1. НЕЛИНЕЙНО УРАВНЕНИЕ ОТ ТИП PERONA-MALIK

Шумът на изображението е даден като следното изображение  $u_0(x): \Omega \rightarrow [0, 255]$  за областта  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ . Разглеждаме следното нелинейно уравнението на Perona-Malik:

$$\begin{cases} u_t(x, t) - \operatorname{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|) \nabla u(x, t)) = 0 & \text{в } \Omega \times I \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 & \text{на } \partial\Omega \times I \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{на } \Omega \end{cases} \quad (6.16)$$

където началната стойност  $u_0(x)$  е дадения шум на изображението в сиво,  $I = [0, T]$  е интервала от време за някои  $T > 0$ ,  $\Omega$  е ограничена правоъгълна област с граница  $\partial\Omega$  и  $n$  е външен единичен нормален вектор към  $\partial\Omega$ ,  $g$  е дадена ненарастваща функция. Има няколко възможности за  $g(s)$ . Избираме да е монотонно намаляваща функция  $g(s) = \frac{1}{1+s^2}$

както в предния параграф и се въвежда ядрото на Gauss  $G_\sigma * u$  за съществуване и единственост на уравнение (6.16). Така дифузионният коефициент  $g(|\nabla G_\sigma * u|)$  налага градиентът на изображението да е голям, т.е. дифузионният коефициент е малък около ръба на изображението. Оттук следва, че нелинейната дифузия запазва ръбовете на изображението и едновременно с това защитава неговата яркост.

Предлагаме полиномна клетъчно невронна мрежа и изучаваме нейната динамика. Предполагаме, че пространствената област съдържа  $M \times M$  точки, подредени в правоъгълна решетка и  $u_{ij}$  представлява пикселовата стойност в дадена точка. Разглеждаме следната основна функция:

$$f(z) = 1 - \left| \frac{1}{2} \left( \left| \frac{z}{m} + 1 \right| - \left| \frac{z}{m} - 1 \right| \right) \right|$$

и нека приближим функцията  $g(\cdot)$  от (6.17) със следният израз:

$$\gamma(z) = \sum_{p=1}^Q C_p f^p(z)$$

Получаваме обобщен нелинеен полиномен КНМ модел с ЧДУ:

$$\frac{du_{ij}(t)}{dt} = \sum_{(kl) \in N_{ij}} \Gamma_{kl} (u_{kl} - u_{ij})$$



$$\Gamma_{kl} = \sum_{p=1}^Q \frac{C_p}{2h^2} \left[ f^p(\|\tilde{\nabla} u_{k,l}\|^2) + f^p(\|\tilde{\nabla} u_{i,j}\|^2) \right] \quad (6.18)$$

Добре известно е, че системата (6.18) клони към постоянното равновесно състояние на решението, представящо средната стойност на началното изображение. Полиномният КНМ (ПКНМ) (6.18) приближава функцията  $g(\cdot)$  с израза  $\gamma(\cdot)$ , което е различно от нулата само за

$|z| = \|\tilde{\nabla} u_{i,j}\|^2 < m$  и това е практично предимство в процеса на обработка

на изображението. По-горното поведение е възможно, защото ПКНМ на система (6.18) има повече от една равновесна точка и за всяко начално изображение изхода съответства едно от тези равновесия.

### 6.2.2. МОДЕЛ НА КОНВЕКЦИЯ- ДИФУЗИЯ ЗА ОБРАБОТКА НА ИЗОБРАЖЕНИЯТА

Тук предлагаме известния модел на нелинейна конвекция- дифузия за обработка на изображения, а също така и за компресия на изображението. Започвайки с нелинейното изотропно уравнение [27] представено в 6.1, ние го модифицираме и построяваме едновременно членове на конвекция и на дифузия, базирани се на градиента на наситеността на изображението. Така нормализираме посоката на изглаждане на изображението върху градиента на наситеността на изображението. Разглеждаме нашият филтър на конвекция-дифузия от следния вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon(|\nabla u|) \cdot \Delta u + \beta(|\nabla u|) \cdot \nabla u = 0 & \text{в } \Omega \times I \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{на } \partial\Omega \times I \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{на } \Omega \end{cases} \quad (6.19)$$

където дифузионния коефициент е означен с  $\varepsilon(|\nabla u|) \equiv \frac{1}{1 + |\nabla u|^2}$ , а

конвекционния вектор  $\beta(|\nabla u|) \equiv \gamma \frac{\nabla u^\perp}{|\nabla u|_\varepsilon}$  за положителна константа  $\gamma$ .

Добре известно е, че ако дифузионният коефициент  $\varepsilon$  е достатъчно малък, в сравнение с величината  $|\beta| h$ , където решението е прекъснато, тогава схемата на крайните елементи на Galerkin водят до осцилации [30].

В този параграф изучаваме следната задача на конвекция- дифузия:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = b \nabla u + c u & \text{в } D \equiv (0, 1)^2 \\ u = 0 & \text{в } \partial D \end{cases} \quad (6.20)$$

където  $b(x, t) \geq \beta$ ,  $c(x, t) \geq 0$  и  $c_0^2(x, t) \equiv (c - b_x / 2) \geq \gamma$ ,  $x, t \in \bar{D}$ , а  $\beta$  и  $\gamma$  са положителни константи. В [30] е показано, че за тези допускания съществува единствено решение на задачата на конвекция- дифузия (6.20).

### 6.2.3. КНМ ПОДХОД ЗА ИЗУЧАВАНЕ МОДЕЛА НА КОНВЕКЦИЯ- ДИФУЗИЯ

Знаем, че някои автономни КНМ са отлични апроксимации на нелинейни частни диференциални уравнения. Разглеждаме следното добре известно ЧДУ - уравнение на реакция-дифузия:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \nabla^2 u$$

където  $u \in R^N$ ,  $f \in R^N$ ,  $D$  е матрица с дифузионни коефициенти и  $\nabla^2 u$  е оператор на Laplacian в  $R^2$ . Има няколко начина за апроксимиране на оператора на Laplacian в дискретното пространство на КНМ синаптичен закон с подходящ  $A$ - темплет.

В нашият случай модела на КНМ за уравнение на конвекция- дифузия (6.20) е:

$$\dot{u}_j(t) = b * A_1 * u_j + c * u_j, \quad 1 \leq j \leq N \quad (6.21)$$

където  $A_1 = (1, -2, 1)$  е едномерен, дискретен Laplacian  $A$ -темплет.

Изучаваме динамиката на КНМ модел (6.21) с метода на хармоничния баланс, основаващ се на специална трансформация на Fourier и намираме решения. Чрез тях предсказваме какви пространствени честоти ще доминират в нелинейните ЧДУ. Основавайки се на факта, че всички клетки в КНМ са идентични [15], въвеждаме подходяща двойна трансформация на Fourier, така че мрежата да се сведе до скаларната схема на Lur'e [26].

Представяме накратко алгоритъма за изследване на динамиката на КНМ модел (6.21):

1. Прилагаме двойна трансформация на Fourier:

$$F(s, z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} z^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) \exp(-st) dt$$

за уравнение (6.21) на КНМ.

2. Намираме преходната функция  $H(s, z)$ , където  $s = i\omega_0$ ,  $z = \exp(i\Omega_0)$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega_0$  е времевата честота,  $\Omega_0$  е пространствена честота.

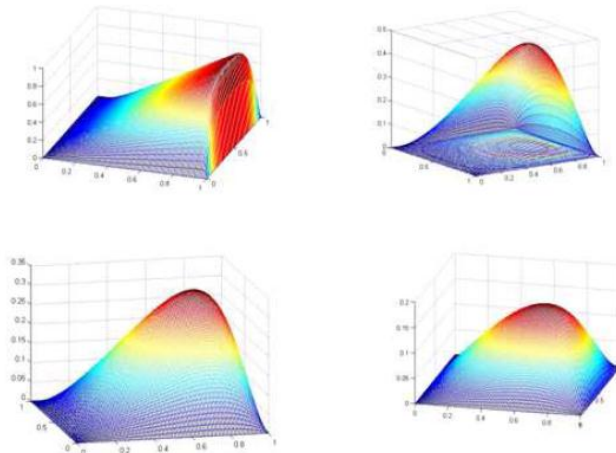
3. Търсим възможните решения на (6.21) от вида:

$$u_j = U_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0)$$

4. Определяме неизвестните ни амплитуда  $U_{m_0}$ , времева честота  $\omega_0$  и пространствена честота  $\Omega_0$ , като:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (6.22)$$

Получаваме следните симулационни резултати за различни стойности на параметрите  $\beta$  и  $\gamma$ :



Фиг. 6.1. Симулиране на алгоритъма на КНМ за задача (6.20) на конвекция- дифузия

Изказвам своята благодарност на научния си ръководител проф. дмн Анжела Славова за многобройните и напътствия, полезни съвети и подкрепа, оказана по време на работата ми върху представения дисертационен труд.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

### **Основните приноси в дисертацията са:**

1) Изследвани са модели за разпознаване и обработка на образи, основаващи се на частни диференциални уравнения (ЧДУ) , чрез полиномни Клетъчно Невронни Мрежи (КНМ). Те могат да се класифицират в 3 основни категории: а). линейни изотропни филтри, б). нелинейни изотропни филтри, в). нелинейни анизотропни филтри. В дисертацията (глава 6) се изучават нелинейни изотропни и/или анизотропни модели на Perona-Malik. За тях се построява полиномен КНМ модел и се прави сравнение между модела на Perona-Malik и полиномния КНМ модел. Установява се, че при полиномния КНМ модел изходният образ се получава без да се спира процеса на обработка, което е предимство при предпроцесната обработка на образа. Въвежда се нов модел основаващ се на нелинейно ЧДУ на конвекция-дифузия, който има приложения в изчистването на образите. За този модел въвеждаме КНМ архитектура с едномерен дискретен A-темплет и изследваме неговите свойства с метода на хармоничния баланс (представен най-подробно в глава 2). Направени са компютърни симулации на КНМ модели.

2) Изучава се явлението хаос в КНМ (глава 3). Разгледани са различни примери на КНМ с по-сложна динамика и за тях са доказани теореми за устойчивост. За уравнението на Newell-Whitehead е изучено явлението “ръб на хаос”. Въвежда се КНМ на реакция-дифузия и се построява полиномен КНМ модел за уравнението на Newell-Whitehead. За този модел се построява алгоритъм за определяне на областта от параметрични стойности, наречени “ръб на хаос”. Направени са компютърни симулации за различни стойности на параметрите.

3) Изучават се решенията от типа бягаща вълна на КНМ (глава 4). Доказани са теореми за структурата на тези решения за обща КНМ, като е направена класификация на решенията в зависимост от тяхната структура. За дискретни в пространството системи каквито са КНМ има сравнително малко резултати за решения от типа „бягаща вълна”. За КНМ модел на уравнението на Newell-Whitehead се изучават решенията от типа бягаща вълна. Направени са компютърни симулации.

4) Изучени са модели за формирането на шаблони, което има приложение в обработката на образи (глава 5). Разгледани са първо единични уравнения с гранични условия на Neumann, а след това и с гранични условия на Dirichle, като основно се доказва устойчивостта на равновесното състояние на съответното уравнение. След това се разглеждат системи в сянка и  $2 \times 2$

дифузионни системи, за които отново се изучава устойчивостта на равновесното състояние. Правят се изводи за приложението им при формирането на шаблони и обработка на образи.

5) Основно е изучен метода на хармоничния баланс (МХБ) (глава 2). Представен е алгоритъм за прилагане на този метод при изучаване на динамиката на КНМ. Основното му приложение е в предсказване на гранични цикли в нелинейни системи. По този начин прилагайки МХБ към различните модели разглеждани в дисертацията, можем да направим изводи за тяхното по-сложно динамично поведение. Направените компютърни симулации потвърждават тази динамика.

6) Представени са подробно основните теореми за устойчивост на линейни КНМ (глава 1). За два примера на линейни КНМ са направени компютърни симулации.

#### **СПИСЪК НА ПУБЛИКАЦИИТЕ**

- [1]. Slavova A., Rashkova V., Travelling waves in Newell-Whitehead Cellular Neural Networks Model, International Journal of Neural Networks and Applications, vol.1, No.2, 2008, pp. 67-72.
- [2]. Slavova A., Rashkova V., Convection diffusion model for image processing, C.R.Bulg.Acad.Sci., t.64, No 3, 2011, pp. 339-344 (IF 0.219), ISSN 1310-1331.
- [3]. Slavova A., Rashkova V., A Novel CNN Based Image Denoising Model, Proc. ECCTD 2011, Linköping, Sweden, 2011, pp.225-228, ISBN 978-1-4577-0616-5, IEEE.
- [4]. Slavova A., Rashkova V., Edge of chaos in reaction-diffusion CNN models, “Mathematical analysis, differential equations and their applications”, Academic publishing house “M. Drinov”, 2011, pp. 207-216, ISBN 978-954-322-454-8.
- [5]. Slavova A., Rashkova V., A Novel PDE Based Image Denoising Model with Applications in Nanoindustry, Mathematica Balkanica (New Series), Vol. 25, No 3 (2011).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Afraimovich V. S. & Nekorkin V. T., Chaos of travelling waves in a discrete chain of diffusively coupled maps, *Int. J. Bifurcation and chaos* 4, 1994, pp. 631-637.
- [2]. Alvarez L. , Guichard F. , Lions P. L. and Morel J. M. , “Axioms and Fundamental equations of image processing”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 123, pp. 199- 257, 1993.
- [3]. Arena P., A mechatronic lampreycontrolled by analog circuits, *Proceedings 9<sup>th</sup> IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Dubrovnik, Croatia, 2001.
- [4]. Arena P., Fortuna L., Branciforte M., Realization of a reaction- diffusion CNN algorithm for locomotion control in an hexapode robot, *Journal of VLSI Signal Processing*, 23:267- 280, 1999.
- [5]. Arena P., Fortuna L., Frasca M., Attitude control in walking hexapod robots : an analogic spatio- temporal approach, *Int. Journal on Circuit Theory and Applications*, 2002.
- [6]. Arena P., Fortuna L., Occhipinti L., A CNN algorithm for real time analysis of DNA microarrays, *IEEE Trans. CAS, I:Fundamental theory and applications*.
- [7]. Balya D., Roska B., Roska T., Werblin F., A CNN framework for modeling parallel processing in a mammalian retina, *Int. Journal on Circuit Theory and Applications*, 30:2, 2002.
- [8]. Britton N. F., *Reaction- Diffusion Equation and Their Applications to Biology*, Acad. Press, New York, 1988.
- [9]. Cahn, J. W., Mallet- Paret, J. & van Vlek, E. S., Travelling wave solutions for systems of ODE's on a two- dimensional spatial lattice, *SIAM J. Appl. Math.*, 59, 1998, pp. 455- 493.
- [10]. Cantrell R. S., Cosner C., *Spatial ecology via reaction- diffusion equations*. John Wiley and Sons, 2003.
- [11]. Chua L. O., *CNN:A Paradigm for Complexity*, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A- Vol. 31, World Scientific, 1998.
- [12]. Chua L. O., Local activity is the origin of complexity, *Int. J. of Bifurcations and Chaos*, Nov. 2005.
- [13]. Chua L. O. and Roska T., *Cellular neural networks and visual computing*, Cambridge University Press, U. K., 2002.

- [14]. Chua L. O. and Roska T., The CNN paradigm, IEEE Trans. Circuits Syst. 40, 1993, pp. 147- 156.
- [15]. Chua L. O., Yang L., Cellular neural networks: Theory, IEEE Trans. Circuits Syst., 35:1257- 1272, 1988.
- [16]. Chua L. O., Yang L., Cellular Neural Network: Applications, IEEE Trans. CAS, vol. 35, 1988, 1273- 1290.
- [17]. Dogaru R., Chua L. O., Edge of chaos and local activity domain of FitzHugh-Nagumo equation, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 8 (2), 1998, 211- 257
- [18]. Genesio R., Tesi A., A harmonic balance approach for chaos prediction the Chua's circuit, Int. J. of Bifurcation and Chaos, 1992, 2:61- 79.
- [19]. Genesio R., Tesi A., Villoresi F., A frequency approach for analyzing and controlling chaos in nonlinear circuits, IEEE Trans. CAS-I, 1993, vol. 40, N 11, pp. 819-827.
- [20]. Hale J. K., Sakamoto K., Shadow systems and attractors in reaction- diffusion equations. Appl. Anal., 32, 1989, 287- 303.
- [21]. Hsu C. H., Lin S. – S., Shen W., Travelling waves in Cellular Neural Networks, Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 9, No.7, pp. 1307- 1319, 1999.
- [22]. Lin C. S., Nt W. M., Stability of solutions of semilinear diffusion equations. Preprint, 1986.
- [23]. Mallet- Paret J., “patial patterns, spatial chaos and traveling waves in lattice differential equations”, in Stochastic and Spatial Structures of Dynamical Systems, eds, van Strien S. J. & Verduyn Lund S. M, 1996, p. 105- 129.
- [24]. Mallett- Paret J. & Chow, S.- N., Pattern formation and spatial chaos in lattice dynamical systems: II, IEEE Trans., Circuits Syst., 1995, 42, 752- 756.
- [25]. Matano H., Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations. Publ. RIMS, 15, 1979, 401- 454.
- [26]. Mess A. I., Dynamics of Feedback Systems, Wiley, London, 1981.
- [27]. Perona P., Malik J., Scale space and edge detection using anisotropic diffusion, in: Proceeding of IEEE Computer Soc. Workshop on Computer Vision, 1987, pp. 16-22.
- [28]. Recekzky C., Roska T. and Ushida A., “CNN- based difference- controlled adaptative nonlinear image filters,” Int. J. Circuit Theory and Applicat., vol. 26, pp. 375- 423, 1998.

- [29]. Roska T., Chua L. O., Wolf D., Kozek T., Tetzlaff R., Puffer F., Simulating nonlinear waves and partial differential equations via CNN- Part I: Basic techniques, IEEE Trans. CAS-I, vol. 42, N 10, pp. 807- 815, Oct. 1995.
- [30]. Shih Y., Elman H. C., Modified streamline diffusion schemes for convection-diffusion problems, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering (1998).
- [31]. Slavova A., Applications of some mathematical methods in the analysis of cellular neural networks, J. Comp. Appl. Math. 114, pp. 387- 404, 2000.
- [32]. Slavova A., Zecca P., CNN model for studying dynamics and traveling wave solutions of FitzHugh-Nagumo equation, Journ. Comp. And Appl. Math., 151, 2003, 13- 24.
- [33] Slavova A., Cellular Neural Networks:Dynamics and Modeling, Kluwer Academic Publisher, 2003.
- [34]. Tetzlaff R., Gollas F., Modeling complex systems by reaction- diffusion Cellular Nonlinear Networks with polynomial Weight- Functions, Proc. IEEE CNN2005, 2005.
- [35]. Weickert J., “A review of nonlinear diffusion filtering”, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin, vol. 1252, pp. 3- 28, 1997.
- [36]. Weickert J. and Benhamouda B., “Nonlinear diffusion scale- space: From the continuous to the discrete setting,” in Proc. ICAOS’96: Images, Wavelets and PDE’s, vol. 219, M. O. Berger et al., Eds. New York: Springer, pp. 111-118, 1996.